Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Nepřímá úměrnost – žákovské strategie, analýza učebnic a didaktické praktiky učitelů

Indirect Proportion – Pupils‘ Strategies, Textbook Analysis and Teachers‘ Didactic Practices

Diplomová práce

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Autor diplomové práce: Bc. David Reichmann

Studijní obor: Učitelství pro ZŠ a SŠ – matematika

Forma studia: kombinovaná

Diplomová práce dokončena: Praha, 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Nadi Vondrové, Ph.D. Všechny použité prameny a literatura byly řádně citovány a práce nebyla použita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne ……..…………………

Podpis ……………………..…………

Poděkování

Děkuji vedoucí mé práce doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a podnětné připomínky. Děkuji učitelům za rozhovory a náslechy hodin, bez nichž by se tato práce neobešla.

Abstrakt

Cílem diplomové práce bylo u vybraných zkušených učitelů matematiky identifikovat a popsat didaktické praktiky používané při výuce nepřímé úměrnosti, provést analýzu nejčastěji používaných učebnic z hlediska přístupu k výuce nepřímé úměrnosti a vybrat vhodné úlohy, které by diagnostikovaly žákovu znalost nepřímé úměrnosti, a u nich identifikovat žákovské strategie řešení a jejich případné obtíže. Nejprve je téma nepřímé úměrnosti popsáno z hlediska kurikulárních dokumentů a výsledků v úlohách na nepřímou úměrnost, jichž dosáhli čeští žáci v několika mezinárodních i národních srovnáních. Z pohledu teorie didaktického konstruktivizmu je charakterizován poznávací proces žáka. Dále jsou popsány způsoby a pojetí výkladu nepřímé úměrnosti tak, jak je nabízejí vybrané učebnice základní školy. Je provedena obsahová analýza učebnic v návaznosti na podobně zaměřené výzkumy. Dále se práce věnuje zahraničním výzkumům proporcionálního uvažování žáků a strategií řešení úloh v oblasti úměr a úměrností, na které navazuje vlastní výzkum zkoumající strategie řešení úloh na nepřímou úměrnost. Další část výzkumu sestávala z polostrukturovaných rozhovorů se zkušenými učiteli, z náslechů v jejich hodinách a z analýzy žákovských prací. Rozhovory i náslechy byly přepsány do protokolů, které byly analyzovány technikami zakotvené teorie. Zjištěné praktiky učitelů, které využívají při výuce nepřímé úměrnosti, stejně jako seznam kritických míst tématu nepřímá úměrnost označených učiteli tvoří jeden z výsledků práce.

Klíčová slova:

úměrnosti, obtíže žáků, chyby, výukové přístupy

Abstract

The goal of the diploma thesis was to identify and describe didactic practices of selected experienced mathematics teachers, used in the teaching of indirect proportion, to make an analysis of the most used textbooks from the point of view of teaching indirect proportion, to select suitable problems which diagnose pupils‘ knowledge of indirect proportion and to identify pupils‘ strategies and their mistakes in solving them. Indirect proportion is first described from the point of view of curricular documents and of Czech pupils‘ results in this area in both national and international surveys. The pupil’s knowledge gaining process is characterised from the point of view of didactic constructivism. Next, ways and conceptions of teaching indirect proportion as provided by selected primary textbooks are given. The content analysis of textbooks was made and compared to results of similar studies. Next, the thesis deals with some results of international research on proportional thinking and solving strategies for problems on proportion which are then used as a starting point of my own research on pupils‘ strategies for problems on indirect proportion. The next part of research consists of semi-structured interviews with experienced teachers, observations of their lessons and analysis of their pupils‘ work. The interviews and observations were transcribed into protocols and analysed using techniques of grounded theory. The identified teachers‘ practices which they use for teaching indirect proportion as well as the list of critical aspects of the topic of indirect proportion as given by the teachers represent the main results of the thesis.

Keywords:

proportions, pupils' problems, mistakes, teaching approaches

Obsah

1. Úvod

Téma Nepřímá úměrnost jsem si zvolil, protože ze zkušenosti vím, že tomuto tématu se ve výuce nedává tolik prostoru jako úměrnosti přímé, a to i přes deklarovanou vyšší obtížnost tohoto typu úměrnosti. Také jsem se osobně přesvědčil, že úlohy na nepřímou úměrnost jsou náročnější i pro studenty na vysoké škole.

Cíle diplomové práce jsou:

- u vybraných zkušených učitelů matematiky identifikovat a popsat didaktické praktiky používané při výuce nepřímé úměrnosti a výuce příbuzných témat
- zjistit, jakými prostředky tito učitelé překonávají úskalí, která v tomto tématu spatřují
- provést analýzu nejčastěji používaných učebnic, popř. těch, které preferují oslovení učitelé, z hlediska přístupu k výuce nepřímé úměrnosti
- vybrat vhodné úlohy, které by diagnostikovaly žákovu znalost nepřímé úměrnosti, a u nich identifikovat žákovské strategie řešení a jejich případné obtíže
- porovnat zjištěné poznatky s poznatky z odborné literatury

Kapitola 2 popisuje téma nepřímé úměrnosti z hlediska kurikulárních dokumentů a výsledků v úlohách na nepřímou úměrnost, jichž dosáhli čeští žáci v několika mezinárodních i národních srovnáních.

Třetí kapitola je věnována poznávacímu procesu v matematice, tak jak jej popisuje teorie didaktického konstruktivizmu. Jsou zmíněny zejména ty poznatky, se kterými je pracováno zejména v oddíle 4.4 věnovaném obsahové analýze učebnic.

Čtvrtá kapitola se věnuje rozboru učebnic. Kapitola nejprve nabízí pohled na funkci a využití učebnice prostřednictvím závěrů vybraných výzkumů a poté i vlastní analýzu vybraných učebnic. Dále je zde provedena obsahová analýza učebnic v návaznosti na podobně zaměřené výzkumy a jejich závěry.

Pátá kapitola dokumentuje výzkumy proporcionálního uvažování žáků a strategií řešení úloh v oblasti úměr a úměrností. Na ně navazuji v šesté kapitole vlastním výzkumem zkoumajícím strategie řešení úloh u úloh na nepřímou úměrnost.

Sedmá kapitola se zabývá analýzou rozhovorů s oslovenými učiteli a rozborem náslechů, které jsem provedl na jejich hodinách. Nejprve je popsána metodologie výzkumu, poté provedena analýza jednotlivých rozhovorů, náslechů hodin (jejich přepis se nachází v příloze) a dalších materiálů (zejména žákovských prací) s ohledem na cíle diplomové práce.

Diplomová práce byla zpracována v rámci projektu GAČR P407/11/1740 Kritická místa matematiky na základní škole – analýza didaktických praktik učitelů.

2. Nepřímá úměrnost jako kritické místo matematiky základní školy

Kritickým místem matematiky na základní škole rozumím v souladu s výše zmíněným projektem GAČR ty oblasti, ve kterých žáci často selhávají, jinak řečeno, která nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost a její tvořivé užívání v každodenním životě produktivně vyvíjely.

Za kritické místo matematiky základní školy můžeme považovat i nepřímou úměrnost. Ukazují na to zkušenosti učitelů a dalších odborníků – viz tabulky 2.1 a 2.2.

Popis kritického místa	*Navrhované možnosti jejich překonávání*	*Zdroj*
Problémy žáků s určením druhu úměrnosti.	Větší časový prostor pro dané téma. Množství nabízených úloh.	(Pěnička [online], 2013)
Problémy žáků při řešení úloh s nadbytečnými informacemi v zadání. (viz obr 2.1)	Předkládání úloh s nadbytečnými informacemi.	(Krynický [online], 2013)
Řešení úloh typu složené trojčlenky. Krynický ([online], s. 3) uvádí, že asi polovina studentů tento typ úlohy nedokáže samostatně vyřešit.	Vytvoření podmínek pro konstrukci vlastního řešení. Až následně doporučit obecný postup řešení – rozdělení úlohy na dvě úměrnosti.	(Krynický [online], 2013)

Tab. 2.1: Kritická místa ve výuce nepřímé úměrnosti

-

Př. 13: Automobil jezdí s průměrnou spotřebou 5,3 litru na 100 km, ujede na plnou nádrž 800 km. Jakou vzdálenost by ujelo kdyby spotřeba klesla na 4,9 litru na 100 km.

5,3 litru … 800
4,9 litru … x km

V obou případech mám stejně plnou nádrž: $5,3 \cdot 800 = 4,9 \cdot x$

$$x = \frac{5,3 \cdot 800}{4,9}\,\text{km} = 865\,\text{km}$$

Auto by při spotřebě 4,9 litru na 100 km ujel 865 km.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je pro studenty nečekaně obtížný. Pokud řeší příklady mechanicky nedokážou se vyrovnat s výskytem hodnoty 100 km a neustále ji započítávají do úměry.

Obr. 2.1: (Krynický [online], s. 6)

Popis kritického místa	*Navrhované možnosti jejich překonávání*	*Zdroj*
Schopnost správné interpretace grafu funkce.	Nabízení úloh s reálným kontextem vycházejícím ze zkušeností žáků.	(Kopáčková, 2005)
Umístění souřadnicového systému na ploše papíru a volba měřítka na jednotlivých osách.	Předkládání - slovně zadaných úloh s reálným kontextem - pestrých, různorodých, méně typických závislostí - různých reprezentací (tabulka, graf, vzorec, slovní vyjádření) - úloh s propojením na další partie matematiky, popř. na jiné vyučovací předměty	(Eisenmann, Kopáčková, 2006)
Chybné prokládání bodů v soustavě souřadnic na základě zkušeností s předchozími modely funkcí.		
Řešení reálných situací naučenými postupy bez reflexe dosaženého výsledku.		

Tab. 2.2: Kritická místa ve výuce příbuzných témat – Pravoúhlá soustava souřadnic, Funkce.

2.1 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV) zařazuje učivo přímé a nepřímé úměrnosti ve vzdělávacím oboru *Matematika a její aplikace* do tematického okruhu *Závislosti, vztahy a práce s daty*, který je v RVP ZV charakterizován takto: „V tematickém okruhu *Závislosti, vztahy a práce s daty* žáci rozpoznávají určité typy změn a závislostí, které jsou projevem běžných jevů reálného světa, a seznamují se s jejich reprezentacemi. Uvědomují si změny a závislosti známých jevů, docházejí k pochopení, že změnou může být růst i pokles a že změna může mít také nulovou hodnotu. Tyto změny a závislosti žáci analyzují z tabulek, diagramů a grafů, v jednoduchých případech je konstruují a vyjadřují matematickým předpisem nebo je podle možností modelují s využitím vhodného počítačového software nebo grafických kalkulátorů. Zkoumání těchto závislostí směřuje k pochopení pojmu funkce.“ (RVP ZV, s. 29) Učivo a očekávané výstupy tematického okruhu jsou uvedené na obrázku 2.2.

ZÁVISLOSTI, VZTAHY A PRÁCE S DATY

Očekávané výstupy

žák

- *vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data*
- *porovnává soubory dat*
- *určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti*
- *vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem*
- *matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů*

Učivo

- závislosti a data – příklady závislostí z praktického života a jejich vlastnosti, nákresy, schémata, diagramy, grafy, tabulky; četnost znaku, aritmetický průměr
- funkce – pravoúhlá soustava souřadnic, přímá úměrnost, nepřímá úměrnost, lineární funkce

Obr. 2.2: Očekávané výstupy vzdělávacího obsahu *Závislosti, vztahy a práce s daty.* (RVP ZV, s. 32–33)

Vzdělávání v dané vzdělávací oblasti směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí prostřednictvím specifických cílů. Z nich vybírám ty, které mohou mít souvislost s učivem přímé a nepřímé úměrnosti (RVP ZV, s. 29–30):

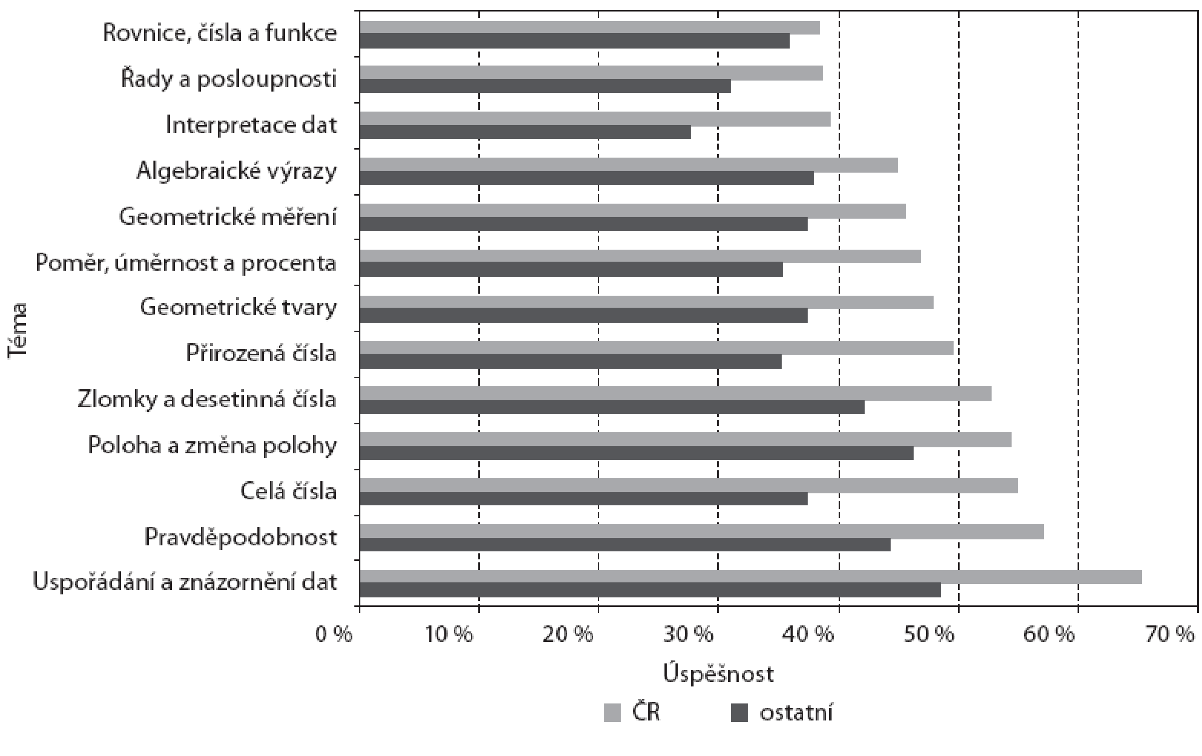
- osvojování si nezbytných matematických vzorců a algoritmů
- rozvíjení logického myšlení, kritického usuzování a srozumitelné a věcné argumentace prostřednictvím řešení matematických problémů
- rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů, poznávání jejich charakteristických vlastností a na základě těchto vlastností určování a zařazování pojmů
- vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a efektivní využívání osvojeného matematického aparátu
- volba správného postupu při řešení problému
- přesné a stručné vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky
- rozvíjení spolupráce při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z běžného života a poznávání možností matematiky a skutečnosti, že k výsledku lze dospět různými způsoby
- rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti při řešení úloh, rozvíjení přesnosti

2.2 Nepřímá úměrnost ve studiích hodnotících výsledky vzdělávání

2.2.1 TIMSS

TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) je mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání, který je orientován na vědomosti a dovednosti rozvíjené ve školní výuce. Výzkum je zaměřen na věkové kategorie devítiletých a třináctiletých žáků a na žáky v posledních ročnících středních škol. Probíhá od roku 1995 ve čtyřletých cyklech. V České republice se výzkumu v roce 2007 účastnili žáci 4. a 8. ročníku základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Analýzou matematických výsledků TIMSS 2007 se zabývá například publikace Hejný a Jirotková (2010). Autory zajímalo, které otázky byly pro české žáky relativně problémovější než pro většinu jejich vrstevníků z ostatních zúčastněných zemí. Takové rozdíly mohou mít objektivní příčiny – například to, že se dané učivo u nás probírá jindy než v zahraničí, může to však signalizovat i závažnější rozdíly v obsahu a pojetí vyučovacích předmětů. Obrázek 2.3 ukazuje zjištěnou obtížnost dílčích témat.



Obr. 2.3: (Hejný, Jirotková, 2010, s. 10)

Autoři se v publikaci snažili vytvořit gradované série úloh vedoucí žáka k rozvoji příslušné dovednosti. K úlohám jsou uvedena řešení a komentáře, ve kterých bývá vysvětlena i souvislost zařazených úloh vzhledem k obtížím žáků při jejich řešení.

V publikaci se objevuje kapitola Poměr, úměrnosti, procenta s podkapitolami: Přímá úměrnost, Nepřímá úměrnost (viz obr. 2.4), Úměrnosti ve 2D a 3D, Procenta, finance.

1. **V následujících tvrzeních škrtni chybné slovo.**

   a) Čím více sušenek koupím, tím více/méně za ně zaplatím.
   b) Když dort rozdělím na větší počet stejných kousků, bude velikost každého kousku větší/menší.
   c) Čím více kombajnů vyjede na dané pole, tím větší/menší rozlohu každý z nich poseká.
   d) Čím více kombajnů vyjede posekat dané pole, tím delší/kratší bude doba jejich práce.
   e) Čím více koní krmíme ze zásoby krmení, tím delší/kratší dobu daná zásoba vydrží.
   f) Čím pomaleji cyklista jede, za tím kratší/delší dobu danou vzdálenost ujede.

2. **Dort má 2,4 kg. Maminka ho rozkrájela na 8 stejných kousků.**

   a) Kolik váží jeden kousek?
   b) Kolik by vážil jeden kousek, kdyby maminka rozkrájela dort na 24 stejných kousků?
   c) Kolikrát více kousků maminka nakrájela v druhém případě?
   d) Kolikrát méně vážil v druhém případě jeden kousek?
   e) Na kolik stejných kousků by maminka musela nakrájet dort, aby jeden kousek vážil 0,2 kg nebo 0,15 kg?

3. **Šest řezbářů vyřeže 30 figurek za 8 hodin.**

   a) Čtyři řezbáři udělají za 6 hodin
   A) 10 figurek B) 15 figurek C) 20 figurek D) 14 figurek.
   b) 20 figurek vyřeže 8 řezbářů za
   A) 6 hodin B) 14 hodin C) 4 hodiny D) 2 hodiny.
   c) 45 figurek vyřežou za 36 hodin
   A) 3 řezbáři B) 1 řezbář C) 2 řezbáři D) 4 řezbáři.
   d) Doplň slovo a číslo do textu:
   Čím více řezbářů, tím ………………… dobu jim trvá vyrobit 30 figurek. 1 řezbář to stihne za ………….. hodin.

Obr. 2.4: (Hejný, Jirotková, 2010, s. 31)

Úlohu 1 na obr. 2.4 autoři doplnili komentářem: „Rozvíjí schopnost poznat na dané sémantické situaci, zda se jedná o úměrnost přímou nebo nepřímou.“ Úloha 3 na obr. 2.4 je úlohou označovanou jako *složená trojčlenka* (viz oddíl 5.1). Tento typ úlohy v některých analyzovaných učebnicích chyběl (viz oddíl 4.4). Jedná se o náročnější úlohu, při jejímž řešení se předpokládá vícekroková úvaha. V podkapitole *Úměrnosti ve 2D a 3D* se nevyskytla úloha na nepřímou úměrnost. Uvedenou publikaci zmiňuje v souvislosti s alternativními učebními materiály i učitelka MH (viz oddíl 7.3).

2.2.2 PISA

Výzkum PISA (*Programme for International Student Assessment*) je v současné době pravděpodobně nejvýznamnějším projektem v oblasti hodnocení výsledků vzdělávání. Sběr dat probíhá jednou za tři roky a testovány jsou znalosti a dovednosti žáků v oblasti čtenářské, matematické a přírodovědné gramotnosti, přičemž jedné z oblastí je vždy věnován větší prostor. V roce 2003 byla hlavní testovanou oblastí matematická gramotnost. Závěry vyvozené v dalším textu se týkají právě studie z roku 2003. Věk testovaných žáků je 15 let.

Za účelem porovnávání výsledků byla vytvořena mezinárodní škála matematické gramotnosti. Ta byla dále rozdělena do šesti úrovní způsobilosti. Ty vyjadřují, jak rozvinuté matematické dovednosti žáci mají a s jak obtížnými úlohami si dokážou poradit. Objevují se zde jak otázky s výběrem odpovědi, tak otázky, které žáky vyzývají k vytvoření vlastní odpovědi.

Pro vypracování souboru testových úloh bylo potřeba oblast matematické gramotnosti dále strukturovat. Matematická gramotnost byla rozdělena na tři hlavní složky: *situace a kontexty* úloh*,* matematický *obsah* neboli vědomosti, matematické *dovednosti,* označované též jako kompetence.

Byly zvoleny čtyři typy situací – kontextů, charakterizované rostoucí vzdáleností od každodenních zkušeností žáků: *osobní, vzdělávací/pracovní, veřejné, vědecké.*

Matematický obsah byl rozdělen do čtyř širších tematických okruhů: *kvantita, prostor a tvar, změna a vztahy, neurčitost.*

Matematické dovednosti byly uspořádány do tří tříd kompetencí: *reprodukce, integrace, reflexe.*

Relativně nejlepšího výsledku dosáhli čeští žáci v oblasti *kvantita.* Naopak nejhůře si vedli v oblasti *neurčitost.* Tyto výsledky odpovídají tomu, jak je výuka matematiky pojímána na českých školách. Zatímco na procvičování numerických dovedností je kladen velký důraz, statistika a pravděpodobnost jsou součástí kurikula až od osmého ročníku. (Frýzková, Potužníková, Tomášek, 2006)

Úlohy týkající se nepřímé úměrnosti lze očekávat v tematických okruzích *kvantita* a *změna a vztahy*. Mezi uvolněnými úlohami se úloha na nepřímou úměrnost nevyskytla. Nicméně podobnou kategorizaci, s jakou pracuje PISA výzkum, používají studie, které analyzuji v oddíle 4.3.

2.2.3 Hodnocení výsledků vzdělávání žáků 9. ročníků

Některá zjištění také přinesl projekt *Hodnocení výsledků vzdělávání žáků 9. tříd* organizovaný *Centrem pro zjišťování výsledků vzdělávání* (CERMAT) od roku 2003 do roku 2008. Projekt zkoumal formou testů a žákovských dotazníků matematické dovednosti, dovednosti v českém jazyce a studijní dovednosti. Testy měly za cíl prověřit nejen znalosti žáků, ale také postihnout a zhodnotit schopnost žáků získané poznatky použít.

Úlohy v testech byly tříděny podle druhu kompetencí, které mají naplňovat. Úlohy týkající se nepřímé úměrnosti lze zařadit pod kompetence: *určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti, vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem, matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů*.

Na obrázcích 2.5 a 2.6 jsou úlohy na přímou a nepřímou úměrnost, které se vyskytly v testech.

<table>
<tr><th>rok</th><th>text úlohy</th><th>úspěšnost</th></tr>
<tr><td>2004</td><td>Úloha 16
Šesti osobám vydrží zásoba vody 12 dnů. Každá osoba má stejnou spotřebu vody na jeden den.
a) Doplňte do tabulky v záznamovém archu, na kolik dnů by vystačila tato zásoba pro uvedený počet osob.
b) Uveďte největší možný počet osob, kterým by voda vystačila na celých 16 dnů.
V tabulce vyplňte prázdná okénka odpovídajícími údaji.
<table>
<tr><td>Počet osob</td><td>12</td><td>9</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>Počet dnů</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>16</td></tr>
</table></td><td>a) 0,26

b) 0,27</td></tr>
<tr><td>2005</td><td>Úloha 17
Anežka nasbírá kyblík borůvek za dvě hodiny. Pepa za každou hodinu naplní jednu třetinu kyblíku. Za jak dlouho by naplnili až po okraj jeden kyblík společně?
A) za $1\frac{1}{5}$ hodiny   C) za $1\frac{1}{3}$ hodiny
B) za $1\frac{1}{4}$ hodiny   D) ještě pomaleji</td><td>0,24</td></tr>
</table>

Obr. 2.5: (Lesáková, Řídká, 2006, s. 11)

<table>
<tr><td>2006</td><td>Úloha 18
Renata si v agentuře přivydělává vypisováním údajů z dotazníků do počítače. Počet zpracovaných dotazníků (d) je přímo úměrný počtu minut (m) strávených u počítače. Renata si změřila, že za 21 minut přepíše 6 dotazníků.
V tabulce doplňte chybějící hodnoty.
<table>
<tr><td>Počet minut (m)</td><td></td><td>21</td><td>28</td><td></td></tr>
<tr><td>Počet dotazníků (d)</td><td>4</td><td>6</td><td></td><td>14</td></tr>
</table></td><td>0,8</td></tr>
<tr><td>2006</td><td>Úloha 19
Zásoba krmiva dovezená na ranč vydrží šesti poníkům 8 dnů. Počet dnů (d), během nichž se zásoba krmiva spotřebuje, je nepřímo úměrný počtu poníků (p) žijících na ranči.
V tabulce doplňte chybějící hodnoty.
<table>
<tr><td>Počet poníků (p)</td><td>6</td><td></td><td></td><td>16</td></tr>
<tr><td>Počet dnů (d)</td><td>8</td><td>6</td><td>4</td><td></td></tr>
</table></td><td>0,37</td></tr>
</table>

Obr. 2.6: (Lesáková, Řídká, 2006, s. 12)

Lesáková a Řídká (2006, s. 13) ze získaných dat vyvozují tyto závěry: „Nejjednodušší úlohy jsou zpravidla takové, ve kterých jsou žáci nejčastěji cvičeni. Největší úspěšnost bývá v úlohách na přímou úměrnost (v úloze 18 téměř 80 %). Naopak velmi podobné praktické úlohy na nepřímou úměrnost patří k nejneschůdnějším (v úloze 16 je úspěšnost 27 %, v úloze 19, kde je napovězeno, že se jedná o nepřímou úměru, 37 %). Uzavřenou úlohu 17 na společnou práci žáci v podstatě nevyřeší (úspěšnost 24 %, náhodné skóre je 25 %)."

Závěrečná zpráva z cyklu pilotních projektů 2005–2008 (2008, s. 9) přináší následující závěry. Nejlepších výsledků žáci dosahovali v úlohách vyžadujících pouze základní matematické operace. Méně úspěšní byli u úloh, kde nelze postupovat pouze nacvičeným způsobem. Nejslabších výsledků dosahovali žáci v geometrických úlohách. Úspěšnost při řešení ovlivňuje společně s nadáním žáků i časový prostor vymezený výuce matematiky. Praxe potvrzuje, že obvyklé školní tempo v matematice je pro nezanedbatelné procento populace stresující, a neumožňuje tak rozvíjet očekávané kompetence.

2.2.4 Matematické kompetence v 8. ročníku

Jako součást závěrečné zprávy grantového projektu GA ČR byly zveřejněny poznámky k matematické kompetenci žáků 8. ročníků (Rendl, 2008). V rámci projektu byla formou testu (obsahujícího matematickou a přírodovědnou část) zjišťována úroveň kompetencí žáků. Autoři vybranému vzorku žáků předložili úlohy obsažené v testu TIMSS-R z roku 1999, což jim umožnilo i následné srovnání výsledků obou vzorků. Test proběhnul v prvním pololetí roku 2002 na souboru žáků 4. a 8. ročníků. Pro naši potřebu se zaměřuji pouze na vybrané výsledky týkající se žáků 8. ročníků.

Matematická část testu měla celkem 45 položek. Ty byly rozděleny do několika obsahových oblastí. Srovnání výsledků testovaného vzorku 25 žáků s výkony žákovské populace České republiky a s mezinárodním průměrem ukazuje tabulka 2.3.

Dále nabízím popis těch položek oblastí, u nichž lze očekávat souvislost s přímou či nepřímou úměrností (v tabulce 2.3 oblasti ve zvýrazněném rámečku). Koncept úměrnosti byl v testu obsahem šesti položek. Tři úlohy byly zařazeny v oblasti Slovní úlohy a tři úlohy v přírodovědné části testu se zařazením do fyziky (Úměra vč. fyziky).

	Počet položek	Sledovaná třída	ČR v položkách testu	Mezinárodní průměr v testu
Čísla	7	77,1 %	70,8 %	58,6 %
Zlomky	5	59,2 %	43,1 %	48,3 %
Zlomky vč. slov. úloh	6	60,4 %	44,2 %	48,7 %
Algebra	10	58,0 %	48,5 %	42,8 %
Algebra vč. slov. úloh	12	58,0 %	46 %	41 %
Geometrie	11	68,4 %	55,0 %	47,9 %
Slovní úlohy	4	56,0 %	38,9 %	36,3 %
Slovní úlohy vč. úměry a zlomků	8	58,5 %	42,4 %	40,0 %
Úměra	3	73,3 %	58,5 %	54,3 %
Úměra vč. fyziky	6	66,0 %	51,4 %	49,6 %
Grafy	3	76.0 %	73,4 %	67,0 %
Grafy, průměr, pravděpodobnost	5	77,6 %	74,4 %	67,4 %
Celkem		66,2 %	55,5 %	50,1 %

Tab. 2.3: Úspěšnost řešení úloh ve zvolených obsahových oblastech. (Rendl, 2008, s. 5)

Porovnání úloh z oblasti Slovní úlohy podle zjištěné úspěšnosti (zadání třetí úlohy ani její zjištěnou obtížnost autor zprávy neuvádí):

- Úloha B8 (úspěšnost 88 %):

„Jestliže 100 g určité potravy obsahuje 300 J energie. Kolik energie obsahuje 30 g téže potravy?“ (Rendl, 2008, s. 10)

- Úloha A4 (úspěšnost 68 %):

„Dívka uběhla 3 kola za stejnou dobu jako chlapec 4 kola. Kolik kol uběhne dívka, když chlapec uběhne 12 kol?“ (Rendl, 2008, s. 10) Chyby se vyskytovaly především u dětí s nejhoršími výkony. U dětí s průměrnými výkony autoři narazili na chybné přenášení náskoku jednoho kola, který se už dále nezvyšuje, do dvanáctého kola.

Porovnání úloh z oblasti Úměry podle zjištěné úspěšnosti:

- Úloha I13 (úspěšnost 80 %; zarážející je nízká úspěšnost v ČR: 32,6 %):

Žáci mají za úkol doplnit dvousloupcovou tabulku, kde v levém sloupci byly dvě hodnoty napětí 2 V a 4 V a v pravém tři hodnoty proudu: 15 A, 30 A, 60 A.

- Úloha E11 (úspěšnost 64 %):

Na obrázku žárovka nasvěcuje kartu ve vzdálenosti 20 cm, ta pak vrhá stín, mající délku strany 10 cm, na stínítko vzdálené dalších 20 cm. Děti mají určit, jaká bude délka strany stínu, posune-li se stínítko o 40 cm dále (směrem od žárovky). Z chybných odpovědí je patrné, že chybující děti druh úměrnosti neidentifikovaly – dvě volily odpověď, podle níž se velikost stínu nezmění, pět z nich dokonce takovou, podle níž by se stín zmenšil. Dvě odpovědi chyběly. Zdá se pravděpodobné, že řešitelé sice identifikovali vztah úměry: „čím je stínítko dále, tím se zobrazí větší stín“, ale že za volbou odpovědi nemusí být uvědomění si kvantitativních vztahů, nýbrž jen volba největšího čísla. Skupina řešitelů pak může zahrnovat jak ty, kteří úměru bezpečně chápou a aplikují, tak ty, kteří uplatňují jen odhad.

- Úloha B3 (úspěšnost 32 %):

V zadané tabulce jsou pro každý ze čtyř předmětů uvedeny hmotnost a objem. Děti mají rozhodnout, který předmět má největší hustotu. Úloha nutí pracovat jednak se vztahem přímé úměrnosti, když jsou předměty „převáděny“ na stejnou hmotnost a k nim zjišťovány odpovídající změny objemu, jednak se vztahem nepřímé úměrnosti mezi objemem a hustotou v podobě „čím větší objem, tím menší hustota (při stejné hmotnosti)“. Rozložení chyb je u žáků testované třídy obdobné jako v ČR. Největší počet dětí (52 %) volí odpověď, která představuje předmět s největším objemem. To může svědčit o tom, že kritickým místem úlohy je právě vztah nepřímé úměrnosti mezi objemem a hustotou.

Zdá se tedy, že chápání vztahů úměry je dětem přístupné, ale podstatně závisí na obeznámenosti s kontextem. Autor zprávy se domnívá, že koncept nepřímé úměry je strukturálně složitější a že by úspěšnost úloh s ním byla nižší i v kontextech, s nimiž jsou děti dobře obeznámeny. Dále uvádí: „Děti prokázaly poměrně bezpečné zvládnutí jednoduchých případů přímé úměrnosti. Ovšem složitější kontexty, v nichž je třeba aplikovat jakýsi koncept „stálosti poměru“, už zvládaly hůře. Chápání povahy úměry je také velmi závislé na obeznámenosti se sémantikou kontextu. Z tohoto hlediska pak měla přinejmenším polovina dětí problém s povahou vztahu objemu a hustoty jakožto nepřímé úměry.“ (Rendl, 2008, s. 14)

2.2.5 Kalibro

Kalibro je dlouhodobý projekt (od roku 1995), který si klade za cíl poskytnout základním a středním školám v České republice podklady pro jejich sebehodnocení. Zaměření testových úloh je v souladu se současnými cíli základního vzdělávání a odpovídá pojetí mezinárodního srovnání PISA. V souhrnu se projektu zúčastnilo přes 3300 škol. Testování probíhá v šesti oblastech: Český jazyk, Matematika, Humanitní základ, Přírodovědný základ, Anglický jazyk a Ekonomické dovednosti.

Pro potřeby své práce jsem vybral výsledky dvou šetření. První bylo provedeno ve školním roce 2011/2012 na vzorku žáků 9. ročníku a druhé ve školním roce 2012/2013 na vzorku žáků 7. ročníku.

V testech jsou používány následující typy úloh:

- Otevřené úlohy – Nejvíce otevřených úloh bývá právě v matematickém testu.
- Výběrové úlohy – Správnému řešení vyhovuje právě jedna položka z nabízených odpovědí. Počet nabízených položek se pohybuje od pěti do devíti.

- Part – Part je nejčastěji používaným typem úlohy. Může mít v nabídce několik správných odpovědí.
- Úlohy na pořadí – Cílem úlohy je uspořádat očíslované prvky nabídky tak, aby pořadí vyhovovalo požadavkům uvedeným v zadání.

2.2.5.1 Výsledky testování na vzorku žáků 9. ročníků ve školním roce 2011/2012

Soubor testovaných žáků byl tvořen 1 742 chlapci a 1 696 dívkami 9. ročníků základních škol (3 183 žáků) a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií (282 žáků). Celkový počet zapojených škol byl 136.

Matematický test byl tvořen sedmi úlohami (A až G), z nichž úloha G se týkala nepřímé úměrnosti. Zadání úlohy G se nachází na obrázku 2.7.

Ve kterých úlohách jde o nepřímou úměrnost?
(úlohy posuzuj, ale neřeš je)

1. Je-li v kanystru 17 litrů vody, lze přilít ještě 13 litrů. Kolik litrů lze přilít, je-li v něm 24 litrů?
2. Tři kopáči vykopou za den 20 metrů příkopu. Kolik metrů příkopu by za den vykopalo pět kopáčů?
3. Houslové trio hraje skladbu 6 minut. Jak dlouho by tutéž skladbu hrálo smyčcové kvarteto?
4. Na slunci roztaje 5 cm sněhu za hodinu. O kolik cm se sníží metrová vrstva sněhu za 7 hodin?
5. Na slunci roztaje 5 cm sněhu za hodinu. Na kolik cm se sníží metrová vrstva sněhu za 7 hodin?
6. Sedmi myším vystačí zásoba obilí na 20 dní. Na jak dlouho vystačí tatáž zásoba osmnácti myším?
7. Dluh je možno splatit sedmi stokorunami. Kolik by ke splacení téhož dluhu bylo potřeba pětikorun?
8. Dva litry kapaliny mají hmotnost 1,6 kg. Jakou hmotnost má sedm litrů téže kapaliny?

Obr. 2.7: Úloha G. (Botlík, Souček, 2012, s. 28)

Botlík a Souček (2012, s. 10) nabízejí k úloze G následující komentář: „Procvičování probíraného matematického učiva ve škole má tu velkou nevýhodu, že žáci (téměř) vždycky vědí, které učivo se procvičuje. Jsou tím připraveni o nácvik velmi důležité součásti zvládnutí matematiky: o matematizaci situací, kterými se mají zabývat. Part byl tímto problémem inspirován: tušili jsme, že i ti žáci, kteří umějí řešit slovní úlohy „na nepřímou úměrnost“, mohou mít problém rozpoznat, ve kterých situacích se o nepřímou úměrnost opravdu jedná a ve kterých nikoli. To se beze zbytku potvrdilo: viz například první tři posuzované úlohy.“

Procentuální úspěšnost žáků při řešení úlohy G ukazuje obrázek 2.8.

Matematika		Celkem	Pohlaví		Průměr známek na vysvědčení			
Úloha			Chlap	Dívky	do 1,5	do 2,5	do 3,5	nad 3,5
Jde o nepřímou úměrnost?	G	58,3	58,1	58,5	63,9	59,0	54,3	52,6

Obr. 2.8: Procentuální úspěšnost žáků při řešení úlohy G. (Botlík, Souček, 2012, s. 65)

Statistické zpracování výsledků (Botlík, Souček, 2012) nabízí porovnání úspěšnosti i mezi dalšími podskupinami celkového vzorku žáků. Jde například o závislost výsledků na vzdělání rodičů, na regionu, na typu školy. Například úspěšnost žáků v úloze G byla na základních školách 57,8 % a na gymnáziích 63,5 %. (Botlík, Souček, 2012)

2.2.5.2 Výsledky testování na vzorku žáků 7. ročníků ve školním roce 2012/2013

Soubor testovaných žáků byl tvořen 970 chlapci a 917 dívkami 7. ročníků základních škol (1 906 žáků) a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií (19 žáků). Celkový počet zapojených škol byl 62.

Matematický test byl tvořen sedmi úlohami (A až G), z nichž úloha D se týkala přímé a nepřímé úměrnosti. Zadání úlohy D je uvedenou obrázku 2.9.

Čtyři kamarádi jedou společně autem na dovolenou do Chorvatska. Auto má na této trase průměrnou spotřebu 6 litrů benzínu na 100 km. Celá nádrž stojí 2 160 Kč, objem nádrže je 60 litrů. Cesta na pobřeží je dlouhá 1000 km. Kamarádi se rovnoměrně dělí o výdaje na benzín. Kolik bude každého z nich stát cesta autem TAM A ZPĚT? *(výsledek zaokrouhli na celé koruny)*

Obr. 2.9: Zadání úlohy D. (Botlík, Souček, 2013, s. 26)

Botlík a Souček (2013, s. 10) nabízejí k chybovosti v úloze D následující komentář: „Mezi nejčastějšími chybnými hodnotami jsou důsledky řádových chyb ve výpočtu, zmatků, kolikrát započítat vzdálenost mezi oběma místy, a kombinace obou chyb.“

Procentuální úspěšnost žáků při řešení úlohy D ukazuje obrázek 2.10.

Matematika 7		Celkem	Pohlaví		Průměr známek na vysvědčení			
Úloha			Chlapci	Dívky	do 1,5	do 2,5	do 3,5	nad 3,5
Příspěvek na benzín	**D**	48,7	51,3	45,9	66,7	52,6	32,9	22,7

Obr. 2.10: Procentuální úspěšnost žáků při řešení úlohy D. (Botlík, Souček, 2013, s. 60)

Statistické zpracování výsledků (Botlík, Souček, 2013) opět nabízí porovnání úspěšnosti i mezi dalšími podskupinami celkového vzorku žáků. Například úspěšnost žáků v úloze D byla na základních školách 48,5 % a na gymnáziích 68,4 %. (Botlík, Souček, 2013)

3. Poznávací proces

S hledáním kritických míst těsně souvisí i mapování procesů žákova učení, které bude jádrem této kapitoly. Řada představ o matematických pojmech vzniká kontaktem žáka s realitou. Významným krokem je přeměna kvantity určitých zkušeností v novou kvalitu – vytvoření *pojmu*. Tento okamžik Hejný a Kuřina (2001) pojmenovávají jako abstrakční zdvih. Je to moment, který završuje etapu pokusů a omylů při vymezování poznávaného pojmu. Čáp (2001, s. 90) definuje *pojmy* jako mentální reprezentace určité skupiny objektů, vystihující jejich podstatné společné znaky.

3.1 Poznávací proces podle didaktického konstruktivizmu

Hejný a Kuřina (2001) učení chápou jako proces konstruování poznatkových struktur. Vycházejí z toho, že v poznávacím procesu žák obvykle nejprve porozumí několika konkrétním příkladům, všímá si, co mají společného, a následně dochází k obecnějším a abstraktnějším poznatkům. Celý poznávací proces Hejný a Kuřina (2001, s. 105 – 118) rozdělují do následujících fází:

- Motivace

Motivace je základním předpokladem nastartování poznávacího procesu. Žák musí mít o učení zájem, vyvinout vlastní aktivitu. Motivace způsobuje jistou tenzi mezi *neumím* a *chci umět.* Je chápána jako souhrn podnětů k určitému jednání.

- Izolované (dříve separované) modely

Model je chápán jako prostředek zorientování se v situaci. Izolovanými modely jsou veškeré reprezentace budovaného pojmu, se kterými se žák setkává a které přispívají k jeho stále přesnějšímu vymezení. Důležitá je také interakce jednotlivých izolovaných modelů při hledání vzájemných podobností. Vytvořením skupiny izolovaných modelů tato etapa končí. Mezi izolovanými modely mají důležité místo ne-modely, zdánlivé modely a překvapivé modely. Překvapivým modelem nazýváme takový model objektu, který se tváří, že jím není, i takový, jehož existenci jsme vůbec nepředpokládali. Zdánlivým modelem rozumíme něco, co modelem daného objektu není, ale může se tak jevit. Pod ne-modelem rozumíme takový jev, který ilustruje komplement zkoumaného objektu. Příklady těchto modelů jsou uváděny v kapitole 7 a v oddíle 4.4.

- Generický (dříve univerzální) model

Generický model vzniká zobecněním mnoha izolovaných modelů na základě poznání jejich vzájemných souvislostí. Představuje obecný návod, vzorec, algoritmus apod. Hraničním typem modelu (mezi izolovanými modely a modelem generickým) je *vzor*. Ten však není plnohodnotným generickým modelem, protože nebyl konstruován vnitřním mentálním zdvihem, ale vznikl pouhým převzetím. Je použitelný na modelování pouze standardních situací.

- Abstraktní znalost

Abstraktní znalost je již zbavená své závislosti na konkrétních objektech či jejich představě. V matematice je vyjadřována zejména matematickou symbolikou.

- Krystalizace

Při krystalizaci dochází k propojování znalosti s existujícími poznatky. Vytváří se tak jistá dynamická struktura poznatků. Často se musí tato struktura přizpůsobit novým poznatkům a naopak nové poznatky jsou posuzovány podle existující struktury.

- Automatizace

Zde již nedochází k novému poznání, ale pouze k procvičení poznaného. Automatizace uvolňuje intelektuální potenciál člověka pro jinou náročnější činnost. Hejný ji již do poznávacího procesu nezahrnuje.

Významnými momenty poznávacího procesu jsou dva mentální zdvihy:

- Zobecnění

V poznávací struktuře se z izolovaných modelů vytvoří model generický. Hlavním momentem je zde objev, pochopení, vlastní mentální konstrukce.

- Abstrakce

Generický model přechází do vyšší úrovně abstraktní znalosti.

Teorie poznávacího procesu podle Hejného a Kuřiny (2001) se zabývá též příčinami, prevencí a reedukací formálních znalostí. Abstraktní znalost, která je opřená o izolované a generické modely, se nazývá neformální. Naopak znalost, která je čistě pamětní a tuto oporu postrádá, se nazývá formální. Formalizmus může vzniknout, pokud ve vyučování není nabídnut dostatečný prostor pro jednotlivé izolované modely a abstraktní znalost je předkládána žákovi příliš brzy. To je v okamžiku, kdy ji nedokáže začlenit do budované struktury poznatků a je nucen ji uchopit jen jako izolovaný paměťový údaj. Léčení formalizmu by tedy mělo spočívat v dobudování chybějících prvků poznání, to je izolovaných a generických modelů.

4. Rozbor učebnic z hlediska tématu úměrnosti

V úvodu se nejdříve dotknu postavení učebnice v procesu výuky. Potenciál každé učebnice lze samozřejmě využít či nevyužít, podstatné ale je, aby text, se kterým učitel pracuje, maximálně vyhovoval jeho stylu práce a potřebám žáků. Moderní pojetí učení jako konstrukce a nikoliv pouhé předání poznání si žádá i změnu role učebnic. Ty dnes mohou nabízet příležitost konstruovat porozumění, podporovat různé styly učení, poskytnout prostor a inspiraci pro kooperativní činnosti žáků apod. Učebnice navíc naplňuje i požadavek určité normy. Nelze spoléhat jen na profesionalitu jednotlivých učitelů a jejich schopnost umět vybrat a sestavit vlastní texty. Je třeba nabízet ke sdílení i obecně platné hodnoty, které se ne vždy musí shodovat s hodnotami učitele.

Moderní technologie umožňují širší pojetí učebnic díky své interaktivitě pro příjemce – žáky, ale i variabilitě pro učitele – ti si mohou upravit texty podle svých potřeb. Je třeba si však uvědomit a vyzdvihnout přednosti klasické učebnice. Těmi jsou funkce systematizační, koordinační a integrační (Vránová, 2010). Žák si díky učebnici osvojuje vědomosti v systému, v logice jevů a souvislostí, nikoliv pouze jako soubor izolovaných údajů a informací.

4.1 Výzkumy týkající se využití učebnic

V mezinárodní srovnávací studii TIMSS z roku 2003 bylo zjištěno, že 5 % všech žáků je vyučováno učiteli, jež nevyužívají žádné učebnice, a téměř dvě třetiny žáků (65 %) mají učitele, kteří učebnici využívají jako základ pro svou výuku. Pro 29 % žáků 1. stupně a 32 % žáků 2. stupně ZŠ učitelé vybírají učebnici jako doplňkový didaktický prostředek při vyučování (TIMSS [online], 2011).

Za jednu z nejkomplexnějších studií v oblasti využívání učebnic je považována práce I. Sigurgeirssona (1990). Jednou z hlavních pozorovaných kategorií v této studii bylo využití času, který je stráven aktivitami s učebnicí. Hlavní zjištění potvrdila vysoký podíl činností žáků s učebnicemi. Například v matematice tvořila práce s texty 75 % celkového času.

U nás se využitím učebnic ve školní výuce zabývá např. Červenkové (2011). Předmětem jejího výzkumu byla analýza učebních aktivit žáků, které jsou s užíváním učebnic spojeny. Ukázala, že v matematice tvořila práce s učebnicí téměř třetinu délky trvání výuky všech hodin (31 %). Frekvence užívání učebnice (tj. v kolika vyučovacích hodinách byl materiál použit) byla v matematice naměřena 67,6 % z celkového počtu vyučovacích hodin.

Při zkoumání vztahu organizačních forem výuky a vyučovacího předmětu Červenková zjistila, že ve všech předmětech převládal hromadný rozhovor se třídou. Hromadný výklad, popř. instrukce učitele (44 % z uvedené formy), a dále diktovaný zápis s pomocí učebnice byly nejvíce zastoupeny právě v matematice (67 % z uvedené formy). Další zjištění se týkala frekvence a délky užívání jednotlivých strukturních prvků učebnice. V matematice bylo zastoupení jednotlivých strukturních prvků následující: výkladový text 64 %, obrazový materiál 12 %, učební úlohy 100 %. Údaje v % jsou vztahovány k počtu pozorovaných hodin s užitím učebnice.

Zajímavý závěr přineslo šetření spojené s otázkou, jak často se žáci s pomocí učebnice připravují na výuku. Z výzkumu vyplynulo, že do matematiky se žáci z učebnice takřka vůbec neučí (v 76 % případů nikdy a v 7 % výjimečně). 14 % žáků se z učebnice učí pouze před písemnou prací (viz tab. 4.1). Naopak vyšší frekvenci přípravy Červenková zaznamenala v případě sešitů, z nichž se na výuku daného předmětu žáci připravují více.

	matematika	
Frekvence:	n	%
velmi často	0	0
občas	4	3,4
písem. práce	17	14,3
výjimečně	8	6,7
nikdy	90	75,6
celkem	119	100,0

n = pozorovaná četnost (počet žáků), % = relativní četnost vyjádřená v procentech

Tab. 4.1: Učení žáků s pomocí učebnice. (Červenková, 2011, s. 107)

Další zkoumanou oblastí byla frekvence písemných domácích úkolů s pomocí učebnice. Z výpovědí žáků vyplynulo, že nejčastěji bývá písemný domácí úkol s pomocí učebnice zadán právě v matematice (viz tab. 4.2). Nejčastějším domácím úkolem v matematice je výpočet úloh či typových cvičení, které souvisejí s probíranou učební látkou (100 % výpovědí).

Frekvence	Ma	
	Σ tříd	%
téměř pokaždé	8	40 %
velmi často (1-2x týdně)	10	50 %
občas (1-2x za měsíc)	1	5 %
výjimečně (1x za pololetí)	1	5 %
nebývají domácí úkoly	0	0 %
celkem	**20**	**100 %**

Tab. 4.2: Frekvence písemných domácích úkolů s pomocí učebnice. (Červenková, 2011, s. 115)

Roli učebnic ve výuce autorka studie spatřuje především v možnostech zprostředkování nového učiva žákům ve výuce, a to zejména při hromadné organizační formě. Zdá se, že z hlediska organizačních forem byla role učebnice vázána na frontální výuku, nikoliv na párovou či skupinovou práci. (Červenková, 2011)

K podobným závěrům došli i další autoři (Janík, Najvar, Najvarová, Píšová, 2007). Ti uvádějí, že v některých jiných zemích žáci tráví prací s učebnicí většinu výukového času. Podle nich je kratší doba strávená prací s učebnicí u nás dána tím, že učebnice jsou pro žáky nezajímavé, nesrozumitelné a náročné, popř. tím, že učitelé dokážou realizovat výuku jinými prostředky.

Pro zajímavost se ještě podíváme na to, jak učebnice využívají žáci. Podle Najvarové (2008) méně úspěšní žáci upřednostňují učení ze sešitů, neprovádějí kontrolu porozumění, preferují učení se zpaměti a při přípravě učebnici převážně nepoužívají. Úspěšnější žáci využívají k přípravě jak sešit, tak učebnice a další materiály. Z učebnic si často vypisují podstatné informace a výpisky obohacují vlastními poznámkami. To značí, že některé učebnice mohou být pro žáky obtížné a nesrozumitelné. Podobné názory vyslovili i oslovení učitelé (Najvarová, 2008) – učivo je často z pohledu žáků málo srozumitelné, obsáhlé, předimenzované vědeckými termíny a abstraktními pojmy. Z toho plyne i vztah řady učitelů k využívání učebnic, které jsou pro ně často jen zdrojem informací.

Informace o tom, jak u nás učitelé matematiky pracovali s učebnicí na konci devadesátých let dvacátého století, přinesla videostudie TIMSS z roku 1999 (Hiebert a kol., 2003). Např. ve srovnání s ostatními sledovanými zeměmi (Austrálie, Hongkong, Nizozemí, Švýcarsko, USA, Japonsko) byla tabule použita v každé vyučovací hodině pouze v České republice. Učebnice či cvičebnice byly v ČR (spolu s Nizozemím) využívány v každé hodině matematiky. Mezi novějšími výzkumy mapující situaci v ČR bylo v rámci výzkumu TIMSS 2007 zjištěno, že, dle výpovědi žáků 8. ročníku ZŠ, samostatná práce s učebnicemi nebo pracovními listy probíhá poměrně často nebo vždy v 55 % hodin matematiky. Bohužel podrobnější informace o tom, k jakým činnostem učitelé učebnice využívají či dokonce jak s nimi pracují samotní žáci, výzkum nepřináší.

4.2 Téma nepřímé úměrnosti ve vybraných českých učebnicích pro základní školu

Nyní se budu zabývat rozborem konkrétních učebnic a konkrétních kapitol týkajících se tématu práce. I když se věnuji nepřímé úměrnosti, někdy se pro úplnost pohledu nevyhnu ani stručnému komentáři k přímé úměrnosti. Pro rozbor jsem vybral pět řad učebnic, které jsou podle mých zkušeností u nás nejvíce používané. Jejich pořadí níže ovšem neodpovídá tomu, jak hodně jsou rozšířené (takové informace nemám k dispozici). V rozboru se zaměřuji na následující prvky:

- didaktické zpracování (logická návaznost kapitol, výkladová struktura kapitol přímá, nepřímá úměrnost, nabízená řešení úloh, práce s chybami, …)
- množství a struktura zastoupení úloh (přímá úměrnost, nepřímá úměrnost, jiné závislosti, …)
- funkce učebnice (samostudium, procvičování)

- přehlednost (zpřehledňující prvky)
- motivační prvky (atraktivita obsahu a formy, kontext úloh)
- funkce obrázků (názorná, ilustrační, motivační, schematizující)
- individualizace (nabídka rozšiřujících úloh)
- ostatní prvky (podpora mezipředmětových vztahů, komfort pro učitele)

4.2.1 ROSECKÁ, Zdena; ČUHAJOVÁ, Vladimíra; RŮŽIČKA, Jiří. *Aritmetika, učebnice pro 7. ročník.* Brno : Nová škola, 1998.

Celá sada učebnic matematiky od nakladatelství Nová škola má být postavena na tzv. činnostním učení. Pokusím se tedy mimo jiné porovnat autory avizovaný důraz na tuto výukovou formu v učebnicích se samotným vymezením činnostního učení. Činnostní učení je postavené na objevování a na prožitcích žáků, po kterých následuje zobecňování a seznamování se s teorií. Dává prostor ke konkrétním činnostem žáků a úvahám nad problémy a jejich řešeními. Je zde kladen důraz na spojení s praktickými situacemi, které jsou žákům blízké. Motivuje žáky, rozvíjí jejich zvídavost a tvořivost. V neposlední řadě pracuje s dovedností komunikovat, hovořit o pozorovaném. (*Nová škola* [online], 2011)

Učebnice pracuje s barevně odlišenými pokyny:

Uvědom si: Zde jsou uváděna shrnutí, zobecnění a důležité poučky.

Činnosti: Většinou se jedná o výzvy k řešení úloh, praktické činnosti a manipulace, výzvy k vyslovení závěru.

Cvičení úsudku, bystření úsudku: Jedná se o úlohy méně tradiční; takto označených úloh v učebnici příliš není.

Rychlovýpočty: Na tomto místě jsou umístěny úlohy zaměřené na procvičování a rutinní zvládnutí početních dovedností.

Čísla hovoří: Zde jsou uvedeny úlohy vztahující se k praktickým situacím z běžného života.

Zlaté testy: Jedná se o úlohy shrnující, co by žáci již měli umět. Často se vracejí ke starším tématům.

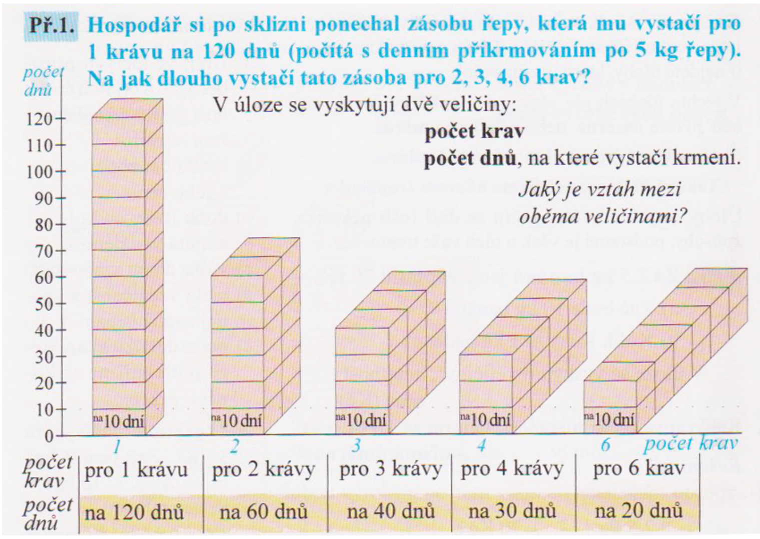
Základní poučky: Pod tímto označením jsou odvozená pravidla a poučky.

Po prolistování celé knihy se domnívám, že toto značení nepřidává na přehlednosti. Jednak vzhledem k používání stejných barev i k jiným účelům a jednak vzhledem k použití zvolených názvů. U nich nelze intuitivně rozkódovat, jaký obsah se za nimi skrývá. Samozřejmě pokud s učebnicí žáci a učitel pracují dlouhodobě a pravidelně, zřejmě si na názvy zvyknou.

Obrázky v učebnici naplňují nejvíce funkci názornou, a to zejména u úvodních úloh (viz obr. 4.1). Na množství názorných obrázků jsou nejlépe zpracována témata zlomky a procenta. U obrázků, které mají plnit funkci ilustrační, popř. motivační, postrádám prvek, který by přitáhl pozornost. Reprodukce fotografií jsou navíc v malém rozlišení.

V učebnici je přímá a nepřímá úměrnost relativně standardně a obhajitelně zařazená po tématech zlomky, celá čísla, poměr a měřítko mapy. Rovněž podle mého názoru vhodně po něm navazují témata procenta a úroky.

Vlastní kapitola nepřímá úměrnost je uvedena úlohou, jejíž obtížnost, představitelnost a reálnost odpovídá požadavkům na úvodní úlohu. Jedná se o závislost počtu dní, na které vystačí krmení, na počtu krav (viz obr. 4.1). Její uchopení z pohledu názornosti hodnotím jako vhodné. Je zde vidět, jak se původní množství krmení rozděluje postupně mezi 2, 3, 4, ... krávy a jak se tím zmenšuje počet dní, na které krmení vystačí. Následuje vyvozený závěr: „Kolikrát se zvětší (zmenší) jedna veličina, tolikrát se zmenší (zvětší) druhá veličina.“ Tento vztah dvou veličin je nazván nepřímou úměrností. Pochopení definice je ověřeno na analogické úloze.



Obr. 4.1: (Rosecká, Čuhajová, Růžička, 1998, s. 56)

U úlohy „1 dělník splní úkol za 48 hodin. Za kolik hodin úkol splní 3 dělníci?“ jsou uvedeny dva způsoby řešení: úvahou a pomocí poměru. Pro další počty dělníků jsou hodnoty zaneseny do tabulky, žáci jsou upozorněni (bez položení otázky, díky níž by k tomu došli sami) na konstantní hodnotu součinu počtu dělníků a počtu hodin na výrobu. Dále se s tímto faktem nepracuje.

V postranním sloupci jsou nabízena „Cvičení úsudku“. Zajímavé a netradiční je cvičení, kde žáci mají k jedné zadané veličině najít druhou veličinu tak, aby šlo o přímou a následně o nepřímou úměrnost. Nelogické mi připadá zařazení cvičení: „Může nastat případ, že mezi dvěma veličinami neplatí vztah přímé úměrnosti?“ v okamžiku, kdy výkladová část kapitoly i předchozí cvičení zavádějí či procvičují úměrnost nepřímou.

Za kapitolou nepřímá úměrnost následuje sada cvičení, v nichž si žáci procvičují určení druhu úměrnosti, sestavení a zdůvodnění dané úměrnosti a výpočty závisle proměnné. Zarážející je fakt, že přestože je vždy položena otázka na určení typu úměrnosti, správným řešením je u všech úloh výhradně úměrnost přímá. Tento nedostatek částečně kompenzují v postraním sloupci umístěná dvě „Cvičení úsudku“ na nepřímou úměrnost.

Při prolistování celé učebnice jsem nenarazil na úlohu, ve které by se nejednalo o přímou ani o nepřímou úměrnost. Žáci by tak mohli snadno dojít k pocitu, že buď platí jedna, nebo druhá.

Další strany učebnice jsou věnovány zavedení pojmu úměra. Jednotlivé typy výpočtu jsou však nabízeny s šablonovitými řešeními, která mohou žáky svádět k formalizmu. Samotný termín úměry nepovažuji za tak důležitý, aby se mu věnovalo tolik prostoru. Byť chápu určité opodstatnění ve vztahu i k jiným předmětům, kde žáci na vyjádření neznámé z podobných vztahů narážejí, dávám přednost věnovat se tomuto tématu až v době, kdy se probírají úpravy rovnic, případně zavést úpravy s porozuměním.

Úlohy zařazené v této učebnici jsou podle mého názoru často obsahově příliš technické (kolik barvy, kolik krmiva, kolik dlaždic, odvodnění šachty ...), chybí pestřejší kulisy, které by zvýšily motivační úroveň pro žáky. S motivačně vhodnými zadáními jsem se setkal na násleších u některých učitelů (MH) – například doba potřebná na zvedání židlí ve třídě v závislosti na počtu žáků, kteří se na zvedání budou podílet či počet sladkostí, které připadnou na žáka v závislosti na počtu žáků, mezi něž sladkosti budou rozdělovány.

Učebnice nabízí tradičně i řešení úloh trojčlenkou. Je zde předložený návod, jak úlohy trojčlenkou řešit, bez většího prostoru pro jeho odvození. Opět se podle mého názoru jedná o příklad pobídky k formálnímu řešení. Na druhou stranu musím uznat, byť vůči trojčlence jsem kritický a osobně ji nevyučuji (dávám přednost tomu, aby žáci řešili úlohy úvahou než daným algoritmem, kterému nemusejí rozumět), že neznalost tohoto pojmu s ohledem na jeho rozšíření, může být určitým handicapem. Proto bych jej uváděl pouze informativně.

Odpovídající prostor je v učebnici věnován grafickému znázornění přímé a nepřímé úměrnosti. Autoři se přes zavedení pravoúhlé soustavy souřadnic (pro potřeby tématu pouze s kladnými hodnotami) dostávají standardním způsobem ke konstrukci grafů: slovní zadání – zanesení do tabulky – konstrukce grafu – čtení dat z grafu.

K učebnici je vydán i pracovní sešit. Typy úloh se převážně kryjí s těmi, které jsou v menším rozsahu v učebnici. Jsou zde ovšem i jiné typy úloh, které považuji za zajímavé. Jedná se o úlohy, v nichž mají žáci ze zápisu zformulovat zadání slovní úlohy či aplikovat úměru na úlohy z fyziky.

Závěrem bych uvedl, že uvedená kapitola nepřímá úměrnost je v učebnici zpracována standardně bez větší snahy o atraktivnější obsah, formu a design. Samozřejmě hlavním aktérem výuky je učitel. Kniha mu ale ve stávajícím uspořádání nepřináší výraznější podporu pro anoncovaný styl činnostního učení. Naopak kladně hodnotím množství úloh, které v učebnici v kombinaci s pracovním sešitem jsou. Jsem přesvědčen, že zvláště u tohoto tématu je nutné vyřešit určité penzum úloh, aby žák získal potřebnou jistotu.

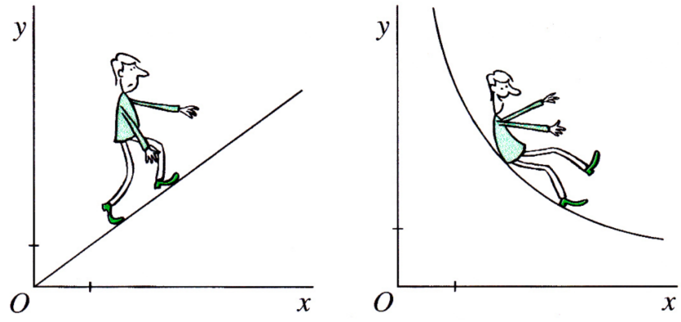
V učebnici **pozitivně** hodnoceno	V učebnici **negativně** hodnoceno
- množství úloh	- malá atraktivita obsahu a formy
- zvolená úvodní úloha v kapitole nepřímá úměrnost - obtížnost, názornost, reálné zasazení	- rozpor zpracování kapitoly nepřímá úměrnost s anoncovaným stylem činnostního učení
- názorná funkce obrázků u úvodních úloh	- přítomnost šablonovitých řešení, riziko formalizmu
	- malé zastoupení úloh na nepřímou úměrnost
	- všechny úlohy jsou zařaditelné do přímé či nepřímé úměrnosti
	- použití zpřehledňujících prvků nepřispívá k avizované přehlednosti

Tab. 4.3: Hodnocení učebnice – shrnutí.

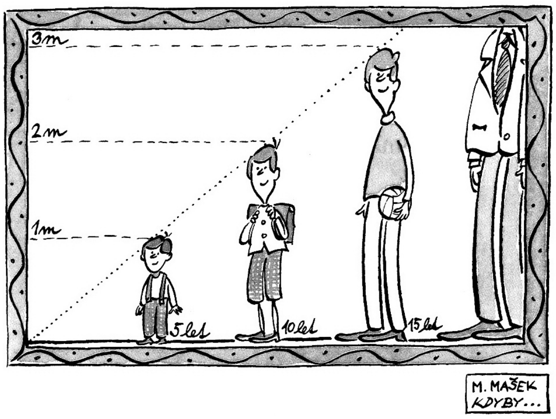
4.2.2 ODVÁRKO, Oldřich; KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 7. ročník základních škol, 2. díl : Poměr, Přímá a nepřímá úměrnost, Procenta.* Praha : Prometheus, 2007.

Učebnice je nakladatelstvím inzerována následujícím způsobem: „Text učebnice je stručný, jednoduše formulovaný, členěný do krátkých odstavců a doplněný mnoha obrázky, tabulkami, diagramy a dalšími názornými prostředky a zajímavými úlohami. Mimořádná pozornost je věnována praktickým úlohám a spojení matematiky s běžnými životními situacemi.“ (Prometheus [online], 2011). Sami autoři učebnici uvádějí: „Výklad je v učebnici omezen jen na nutné minimum. Každý paragraf začíná motivačními úlohami, podstatná část textu je věnována cvičením. Úlohy se dvěma srovnatelnými variantami úkolů může vyučující využít jak pro samostatnou práci žáků, tak i k prověrkám vědomostí.“ (Odvárko, Kadleček, 1999, s. 332)

Této stručné anotaci musím dát za pravdu. Učebnice si neklade za cíl ohromit atraktivním barvotiskem a množstvím zpřehledňujících symbolů a barevnými odlišeními. Přísně drží jednotný formát a úpravu. Přes svůj střídmější charakter budí dojem přehlednosti již při prvním otevření. Myslím, že je to správně zvolený přístup i s ohledem na A5 formát knihy, ve kterém výše uvedené vymoženosti moderních učebnic často působí kontraproduktivně. Obrázky jsou používány ve dvou funkcích – motivačně, kdy většinou vtipně a na správném místě poutají pozornost (viz obr. 4.2) a jako schematizující a názorný prvek u řešení úloh (viz obr. 4.3).

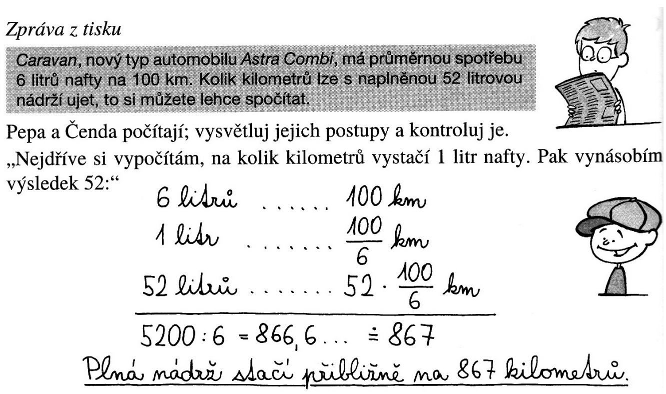


Obr. 4.2: (Odvárko, Kadleček, 2007, s. 46)



Obr. 4.3: (Odvárko, Kadleček, 2007, s. 29)

Na přehlednosti učebnici dodává i jednoduché rámování základních pouček, občasné používání zápisu řešení úloh jakoby psaným písmem a jejich zasazením do rozhovoru dětí (viz obr. 4.4).



Zpráva z tisku

Caravan, nový typ automobilu *Astra Combi*, má průměrnou spotřebu 6 litrů nafty na 100 km. Kolik kilometrů lze s naplněnou 52 litrovou nádrží ujet, to si můžete lehce spočítat.

Pepa a Čenda počítají; vysvětluj jejich postupy a kontroluj je.

„Nejdříve si vypočítám, na kolik kilometrů vystačí 1 litr nafty. Pak vynásobím výsledek 52:“

6 litrů ...... 100 km

1 litr .... $\frac{100}{6}$ km

52 litrů .... $52 \cdot \frac{100}{6}$ km

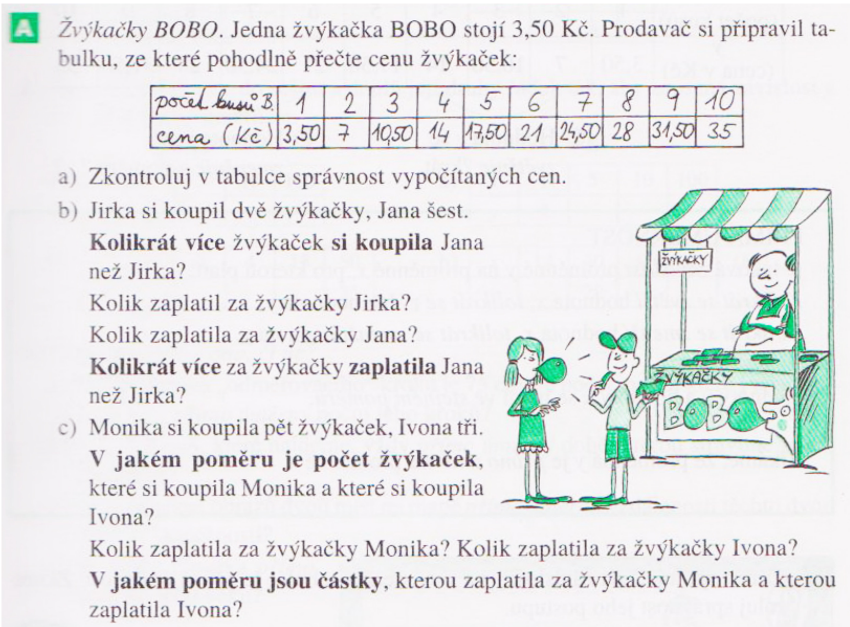
$5200 : 6 = 866{,}6\ldots \doteq 867$

Plná nádrž stačí přibližně na 867 kilometrů.

Obr. 4.4: (Odvárko, Kadleček, 2007, s. 30)

Co se týká obsahového uspořádání učebnice, témata jsou opodstatněně řazena v pořadí Poměr, Přímá a nepřímá úměrnost, Procenta, Úroky. Po dvou kapitolách jsou umístěna vždy souhrnná cvičení. Učebnice je vybavena na jedné straně rozepsanými klíčovými kompetencemi a očekávanými výstupy žáků, což je možné využít při sestavování školních vzdělávacích programů či při tvorbě prováděcích (tematických) plánů. Uváděné výstupy jsou jasné, stručné a konkrétní. Velkým plusem takto koncipované sady učebnic je i to, že jednotlivým tematickým celkům je vyčleněn vždy jeden díl učebnice. Pro učitele to přináší větší svobodu při sestavování prováděcího plánu potažmo školního vzdělávacího programu. Učitel není závislý na uspořádání učiva v učebnici, může si jej sám modulově sestavit. Je to samozřejmě přehlednější i pro žáky. Ti často dostávají do ruky učebnice, z nichž je řada kapitol odsunuta do dalších ročníků.

Nyní ke zpracování kapitoly Přímá úměrnost. Ta logicky předchází úměrnosti nepřímé. V téměř každé vzorově řešené úloze se objevuje práce s tabulkou. Zobecněná pravidla jsou jasně a přehledně zformulována v rámečcích. U vlastních úloh oceňuji, že nejsou postavené na jedné otázce, ale vždy se jedná o sadu otázek vycházejících z údajů v tabulce (viz obr. 4.5).



A *Žvýkačky BOBO*. Jedna žvýkačka BOBO stojí 3,50 Kč. Prodavač si připravil tabulku, ze které pohodlně přečte cenu žvýkaček:

počet kusů B.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
cena (Kč)	3,50	7	10,50	14	17,50	21	24,50	28	31,50	35

a) Zkontroluj v tabulce správnost vypočítaných cen.

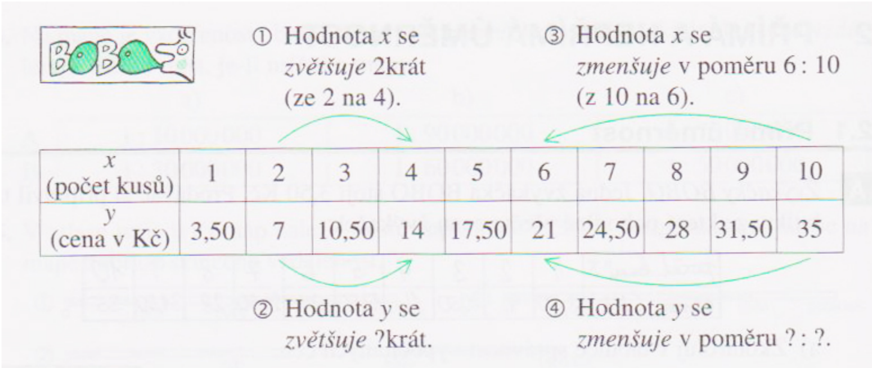
b) Jirka si koupil dvě žvýkačky, Jana šest.
Kolikrát více žvýkaček **si koupila** Jana než Jirka?
Kolik zaplatil za žvýkačky Jirka?
Kolik zaplatila za žvýkačky Jana?
Kolikrát více za žvýkačky **zaplatila** Jana než Jirka?

c) Monika si koupila pět žvýkaček, Ivona tři.
V jakém poměru je počet žvýkaček, které si koupila Monika a které si koupila Ivona?
Kolik zaplatila za žvýkačky Monika? Kolik zaplatila za žvýkačky Ivona?
V jakém poměru jsou částky, kterou zaplatila za žvýkačky Monika a kterou zaplatila Ivona?

Obr. 4.5: (Odvárko, Kadleček, 2007, s. 27)

Autoři doplňují již od přímé úměrnosti tabulky naznačenými šipkami (viz obr. 4.6), které mají žáka vést k hlubšímu porozumění situaci.

V závěru kapitoly o přímé úměrnosti je na dvou stranách nabídnuta také trojčlenka. Své výhrady jsem již uvedl při hodnocení předchozí učebnice, platí i zde.



① Hodnota *x* se *zvětšuje* 2krát (ze 2 na 4).

③ Hodnota *x* se *zmenšuje* v poměru 6 : 10 (z 10 na 6).

x (počet kusů)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y (cena v Kč)	3,50	7	10,50	14	17,50	21	24,50	28	31,50	35

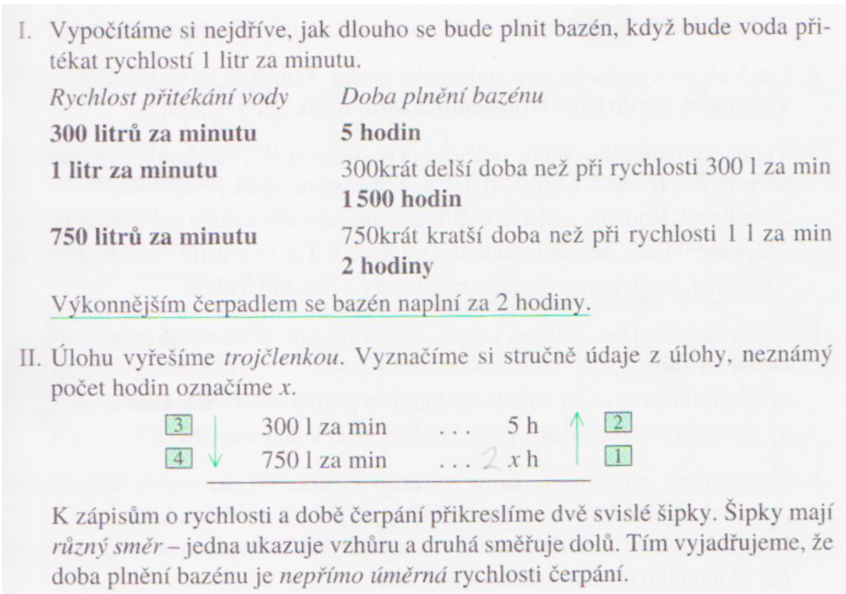
② Hodnota *y* se *zvětšuje* ?krát.

④ Hodnota *y* se *zmenšuje* v poměru ? : ?.

Obr. 4.6: (Odvárko, Kadleček, 2007, s. 28)

Téma Nepřímé úměrnosti začíná úvodním příkladem – jedná se o závislost času projití trasy na rychlosti turistů. Příklad je řešen pomocí tří kroků, tří otázek, které mají žáci zodpovědět, a z odpovědí je v učebnici vyvozen příslušný závěr: Kolikrát je kratší čas, tolikrát je vyšší rychlost. Kolikrát je delší čas, tolikrát je nižší rychlost. Zde si dokážu představit, i s ohledem na umístění tohoto příkladu na začátku tématu, názornější obrázek. V učebnici je zařazen pouze ilustrační obrázek.

Má hlavní výhrada směřuje ale k rozsahu, který je nepřímé úměrnosti věnován. V podstatě pouze na čtyřech stranách se nachází úvodní příklad, vyvozené vlastnosti, čtyři cvičení, dva nabídnuté postupy řešení a v závěru sedm slovních úloh. Cvičení jsou výhradně zaměřená na doplňování údajů do tabulek bez výraznější obměny. Určování typu závislosti se zde děje také výhradně na podkladě tabulky. Očekával bych slovně zadané závislosti a promíchané s přímou úměrností či závislosti nezařaditelné ani mezi přímou ani mezi nepřímou úměrnost. I úloha pro přemýšlivé by mohla být zasazena do konkrétnějších souvislostí, ale pracuje pouze s úvahami nad abstraktními čísly.



I. Vypočítáme si nejdříve, jak dlouho se bude plnit bazén, když bude voda přitékat rychlostí 1 litr za minutu.

Rychlost přitékání vody	*Doba plnění bazénu*
300 litrů za minutu	**5 hodin**
1 litr za minutu	300krát delší doba než při rychlosti 300 l za min **1 500 hodin**
750 litrů za minutu	750krát kratší doba než při rychlosti 1 l za min **2 hodiny**

Výkonnějším čerpadlem se bazén naplní za 2 hodiny.

II. Úlohu vyřešíme *trojčlenkou*. Vyznačíme si stručně údaje z úlohy, neznámý počet hodin označíme *x*.

$\boxed{3}$ ↓ 300 l za min . . . 5 h ↑ $\boxed{2}$

$\boxed{4}$ 750 l za min . . . 2 *x* h $\boxed{1}$

K zápisům o rychlosti a době čerpání přikreslíme dvě svislé šipky. Šipky mají *různý směr* – jedna ukazuje vzhůru a druhá směřuje dolů. Tím vyjadřujeme, že doba plnění bazénu je *nepřímo úměrná* rychlosti čerpání.

Obr. 4.7: (Odvárko, Kadleček, 2007, s. 35)

V učebnici jsou nabízena dvě vzorová řešení, z toho jedno trojčlenkou (viz obr. 4.7). První řešení pracuje s přepočtem na 1 litr za minutu. Možná by mohlo být doplněno i zápisem do tabulky, pro tři položky je použití tabulky již opodstatněné. Navíc by došlo k propojení práce s tabulkami ve vztahu k předchozím stránkám, kde je autoři výrazně preferovali.

Slovní úlohy na závěr jsou sestaveny s ohledem na procvičení látky vhodně, tematicky jsou pestré. Oceňuji zařazení hádanky: „Jeden člověk vykope studnu za 100 hodin. Za jak dlouho vykope stejným tempem takovou studnu 100 lidí?“ (Odvárko, Kadleček, 2007, s. 37) jako úlohy, která nemá typizované řešení.

Hodně prostoru je věnováno grafům přímé a nepřímé úměrnosti. Tematicky jim předchází kapitola Pravoúhlá soustava souřadnic v rovině. Ta svým rozsahem, tj. množstvím vzorově řešených příkladů i úloh k procvičení umožní žákům získat dovednosti potřebné právě pro přímou a nepřímou úměrnost. Zajímavá je opět úloha pro přemýšlivé, která je však pouze jedna.

U přímé úměrnosti se začíná zanesením dat z tabulky do grafu u dvou různých úloh. Žáci si tak potvrdí, jak vypadá graf přímé úměrnosti a jaké má vlastnosti. U druhé úlohy se navíc dozvědí (opět bez nějakého prostoru pro vlastní odvození) o možnosti zápisu závislosti vztahem $y = k \cdot x$, resp. že poměr $y : x$ je konstantní. Nicméně ve cvičeních jsou zastoupeny i úlohy, v nichž se s tímto vztahem dále pracuje. Např. k nabídnutým rovnicím žáci mají přiřadit příslušný graf.

Podobným způsobem je zaváděn i graf nepřímé úměrnosti. Nejprve se z tabulky vyvozuje rovnice nepřímé úměrnosti $x \cdot y = k$, resp. $y = k : x$. Následuje sestrojení grafu a ověření, že se nejedná o přímku. U úvodní úlohy jsou vynášeny pouze 4 body, na první pohled by tedy mohlo dojít k záměně s přímkou. Následuje další úloha, u níž je opět vynesen graf. Závěrem je uvedeno shrnutí podstatných zjištění ve zvýrazněném rámečku – tvar grafu, název křivky, rovnice nepřímé úměrnosti.

V závěrečných cvičeních jsou nabízeny převážně standardní úlohy typu: „doplň tabulku, zapiš úměrnost vzorcem, sestroj její graf“. Výjimku tvoří jediná úloha, kterou uvádím na obr. 4.8. Škoda, že podobných úloh není v učebnici více.

4. Závislost y na x je dána tabulkou:

x	5	15	25
y	25	15	5

a) Ukaž, že tato závislost není ani přímá, ani nepřímá úměrnost.
b) Změň jedno číslo v druhém řádku tabulky tak, aby tabulka popisovala nepřímou úměrnost.
c) Sestroj graf původní závislosti i graf vytvořené nepřímé úměrnosti.

Obr. 4.8: (Odvárko, Kadleček, 2007, s. 46)

Závěrem konstatuji, že uvedenou učebnici hodnotím velmi dobře. Nicméně právě kapitola, na níž jsem se zaměřil, patří mezi ty méně zdařilé. Mé výhrady se týkají zejména celkového rozsahu a počtu zajímavých a netradičních úloh. I v souhrnných cvičeních se na úlohy na nepřímou úměrnost dostalo minimálně.

V učebnici **pozitivně** hodnoceno	V učebnici **negativně** hodnoceno
- jednotlivé díly sady učebnic obsahují vždy malé tematické celky	- malý rozsah věnovaný tématu nepřímá úměrnost
- logická návaznost kapitol	- malý počet zajímavých, netradičních úloh
- přehlednost!	
- použití obrázků (funkce motivační, schematizující, názorný prvek u řešení)	
- zpracování kapitoly přímá úměrnost	
- větší rozsah otázek, kde mají žáci rozhodnout, zda se jedná či nejedná o přímou úměrnost.	
- umístění otázek „pro přemýšlivé“	
- přítomnost úloh pracujících s chybami, např. že 3,65 hodiny nejsou 3 hodiny a 65 minut	
- výběr úloh s ohledem na běžné životní situace	

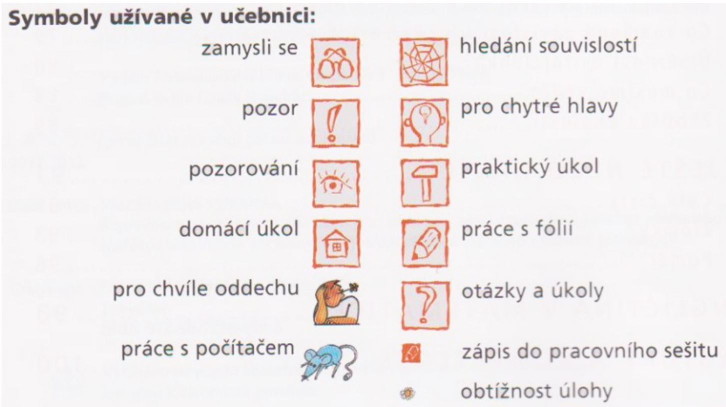
Tab. 4.4: Hodnocení učebnice – shrnutí.

4.2.3 BINTEROVÁ, Helena; FUCHS, Eduard; TLUSTÝ, Pavel. *Matematika 7, Aritmetika : učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia.* Plzeň : Fraus, 2008.

První řádky věnuji charakteristice učebnice pohledem autorů a vydavatele. Ti píší: „Autorský tým se často zamýšlel nad tím, jak dosáhnout toho, aby matematika patřila u většiny dětí mezi oblíbené předměty a aby byly získané vědomosti dětem užitečné. S našimi učebnicemi, které maximálně vycházejí vstříc dětské potřebě objevovat a experimentovat, se vše může změnit. Jeden z nejtěžších úkolů učitelů matematiky je učit předmět tak, aby ho děti nechápaly jako nezáživný soubor vzorců, pouček a početních postupů, které ve svém životě nebudou příliš potřebovat, ale jako nástroj, který jim umožní lépe chápat svět a orientovat se v něm. Učebnice posilují mezipředmětové vztahy a obsahují prvky vnější integrace, stimulují žáka k aktivní činnosti, kladou důraz na vizualizaci učiva množstvím fotografií a ilustrací, jsou graficky atraktivní s přehlednou úpravou usnadňující orientaci v učivu, věnují pozornost uvádění teoretických poznatků do praktického života.“ (Fraus [online], 2011)

Vydavatelství nabízí vizuálně určitě atraktivní sady učebnic s komfortním servisem jak pro učitele, tak pro žáky. Nabízí pracovní sešity, metodiky, časově rozpracované tematické plány, interaktivní učebnice, elektronické přípravy pro učitele umožňující tvorbu vlastních interaktivních materiálů, elektronické nástroje k zadávání, sdílení i kontrole prací žáků. Zde bych zmínil práci Knechta a Janíka (2008), kde autoři upozorňují na roli učitele při výběru učebnic a na riziko podlehnutí důvodům, které by měly být při výběru druhořadé. V tomto případě by to mohl být nabízený komfort pro učitele.

Učebnice pracuje s následujícími zpřehledňujícími symboly (viz obr. 4.9).



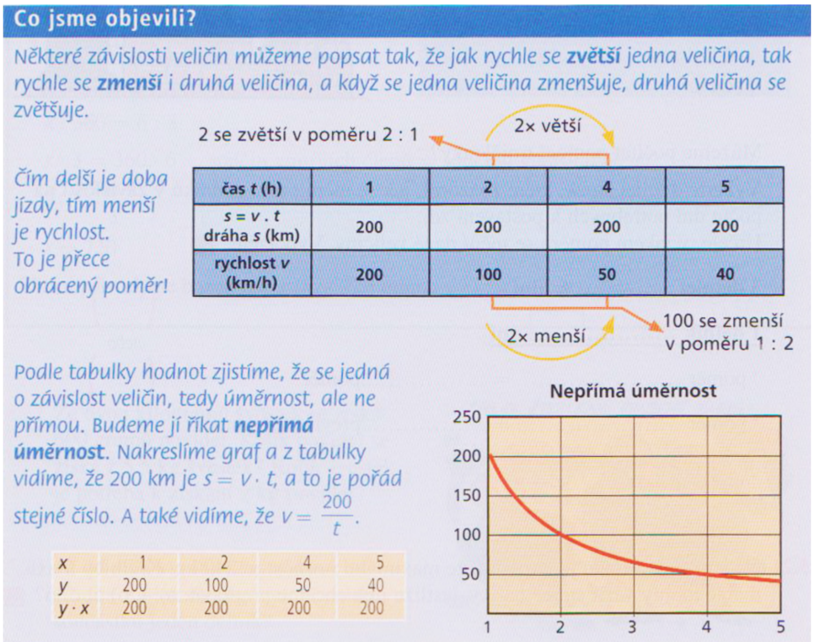
Obr. 4.9: (Binterová, Fuchs, 2008, s. 4)

Jejich umístění v textu mi někdy připadá smysluplné a odpovídající obsahově použitému symbolu, jindy poněkud uměle zařazené. Vlastní uspořádání kapitol je přehledné jak po obsahové, tak i po grafické stránce. Obrázky opět plní názornou i motivační funkci, byť mě osobně zaujaly více ilustrace v předchozí učebnici, což ale může být záležitost individuálního vkusu.

Komentář autorů avizuje podporu mezipředmětových vztahů, což se děje zpravidla prostřednictvím otázek směrovaných do jiných předmětů umístěných na okraji stran. Zdají se většinou vhodně volené a nabízejí dostatek prostoru pro využití učitelem či jako inspirace pro zvídavější žáky. Mohly by však být formulovány problémově. Příliš často staví jen na kompetencích spojených s vyhledáváním informací než kompetencích k řešení problémů.

Tematické řazení kapitol předcházejících a následujících po nepřímé úměrnosti je: Poměr – Mapy a plány – Co znamená závislost v matematice – Úměrnost a trojčlenka – Ještě něco navíc (podkapitola Poměr). Vhodně je v učebnici zařazena kapitola týkající se závislostí před vlastní přímou a nepřímou úměrností. Považuji za správné též zařazení úloh z fyziky (v sedmém ročníku je ve fyzice zpravidla probíráno souběžně téma dráha, rychlost, čas), které podtrhují užitečnost a přesah následujících kapitol.

Přímá a nepřímá úměrnost je začleněna do jedné kapitoly – Úměrnost a trojčlenka. Na rozdíl od předchozích učebnic zde nejsou nabídnuty na úvod úlohy s postupem řešení. Výhodu takového přístupu lze vidět v tom, že žáci se mohou oprostit od předkládaného způsobu řešení a řešit úlohu svým způsobem. Je třeba mít na mysli i možná rizika – někteří žáci, pokud nemají oporu např. v sešitě a spoléhají na samostatné zvládnutí tématu, by mohli mít s pochopením problém. Podobný pocit mám i u některých shrnujících rámečků, které podle mě mohou být bez vysvětlujícího komentáře učitele pro některé žáky nesrozumitelné. Přimlouval bych se za méně informací připadajících na jeden rámeček (viz např. obr. 4.10).


Co jsme objevili?

Některé závislosti veličin můžeme popsat tak, že jak rychle se **zvětší** jedna veličina, tak rychle se **zmenší** i druhá veličina, a když se jedna veličina zmenšuje, druhá veličina se zvětšuje.

2 se zvětší v poměru 2 : 1

2× větší

Čím delší je doba jízdy, tím menší je rychlost. To je přece obrácený poměr!

čas t (h)	1	2	4	5
$s = v \cdot t$ dráha s (km)	200	200	200	200
rychlost v (km/h)	200	100	50	40

2× menší

100 se zmenší v poměru 1 : 2

Podle tabulky hodnot zjistíme, že se jedná o závislost veličin, tedy úměrnost, ale ne přímou. Budeme jí říkat **nepřímá úměrnost**. Nakreslíme graf a z tabulky vidíme, že 200 km je $s = v \cdot t$, a to je pořád stejné číslo. A také vidíme, že $v = \frac{200}{t}$.

x	1	2	4	5
y	200	100	50	40
$y \cdot x$	200	200	200	200

Obr. 4.10: (Binterová, Fuchs, 2008, s. 85)

Na druhou stranu hodnotím velmi kladně zpracování závěrečného celostránkového shrnutí – je přehledné a obsahuje opravdu to nejpodstatnější.

Správné je dle mého názoru i nezahlcování termíny hned od začátku. Pojmenování přímé úměrnosti se zavádí např. až po nabídce několika úloh tohoto typu závislosti.

Zadání úloh obsahuje většinou dílčí otázky a úkoly, pomocí kterých žáci postupně odhalují vlastnosti obou úměrností. Např. Jedná se o přímou úměrnost? Sestrojte graf. Čemu se rovná podíl $y : x$? Je pro hodnoty, které si odpovídají, vždy stejný? Jak se mění hodnota y v závislosti na x? Žáci tak mají možnost si na většinu věcí přijít sami.

Učebnice neopomíjí ani standardně vyžadované znalosti a dovednosti – zavádí termíny koeficient přímé a nepřímé úměrnosti, pracuje s tabulkami, nabízí klasický zápis šipkami, konečně zavádí i řešení trojčlenkou (viz obr. 4.11). U trojčlenky jsem měl pocit, že autoři sdílejí můj názor na tento způsob řešení, tj. nabízejí uvedený postup jen informativně a volitelně. Dále jej nijak nerozvíjejí a žákům nevnucují.

Celou učebnici považuji za přehlednou, ovšem způsob zápisu řešení (ručně psaný) tak, jak jej nabízí učebnice Odvárko, Kadleček (2007), je z mého pohledu ještě vhodnější. Tam je jasně odlišeno, co je vlastní zápis úlohy a co je komentář.

Zapamatujeme si

Když řešíme nepřímou úměrnost, můžeme použít **trojčlenku**.

Hodnoty daných veličin a neznámé zapisujeme **podle šipek do poměru**.

Z rovnosti poměru a převráceného poměru pak zjistíme neznámou. Rovnosti poměrů říkáme **úměra**.

Bazén městské plovárny se napustí šesti stejnými přívody za 36 minut.
Za jak dlouho se napustí třemi přívody?

6 přívodů.........360 min
3 přívody............x min

poměr = převrácený poměr

$x : 360 = 6 : 3$ porovnáme zlomky

$\frac{x}{360} = \frac{6 \cdot 120}{3 \cdot 120}$

$\frac{x}{360} = \frac{720}{360}$

$x = 720$ min

nebo

6 přívodů.........360 min
3 přívody............x min

poměr = převrácený poměr

$x : 360 = 6 : 3$

$x \cdot 3 = 360 \cdot 6$ součin vnitřních členů = součinu vnějších členů

$x = \frac{360 \cdot 6}{3}$

$x = 720$

Třemi přívody se bazén napustí za 720 minut.

Obr. 4.11: (Binterová, Fuchs, 2008, s. 87)

V učebnici **pozitivně** hodnoceno	V učebnici **negativně** hodnoceno
- podpora mezipředmětových vztahů	- malé množství zajímavých a netradičních úloh
- zařazení úloh na procenta v kapitole přímá úměrnost (ze zkoumaných učebnic zařazeno jako v jediné)	- neatraktivní výběr kontextu jednotlivých úloh (zedníci stavějí zeď, dělníci vyrábějí součástky apod.)
- relativní přehlednost	- není vhodná pro samostudium
- přehledné závěrečné shrnutí u kapitoly nepřímá úměrnost	- absence úloh na rozlišení jednotlivých

	druhů úměrnosti
- logická návaznost kapitol	- v kapitole věnované rozšíření tématu („A ještě něco navíc“) výrazně převažují úlohy na přímou úměrnost nad úlohami na nepřímou úměrnost.
- vizuálně atraktivní zpracování	- předimenzované shrnující rámečky
- doplňkový komfort pro učitele	
- funkce obrázků - schematizující, motivační	

Tab. 4.5: Hodnocení učebnice – shrnutí.

4.2.4 ŠAROUNOVÁ, Alena; RŮŽIČKOVÁ, Jitka; VÄTEROVÁ, Věnceslava. *Matematika 7, 2. díl.* Praha : Prometheus, 1998.

Na úvod opět nabízím několik slov autorů a vydavatele: „Součást jednoduše, logicky a čtivě zpracované nové řady učebnic matematiky pro 2. stupeň základní školy. Klade důraz na vlastní zkušenost žáků, na přiměřenou motivaci a výběr úloh, se kterými se děti v praxi skutečně setkávají. Zajímavá grafická úprava poskytuje velkou zásobu úloh vhodných k procvičování učiva. Na konci každého dílu jsou jednoduché testy, pomocí nichž se žák může sám vyzkoušet a zjistit, jak učivu porozuměl.“ (Prometheus [online], 2011)

Učebnice svojí grafickou podobou připomíná již rozebíranou učebnici – Odvárko, Kadleček (1998). Obě jsou vydány stejným nakladatelstvím Prometheus. Jedná se také pouze o dvoubarevný tisk. Ten může ubírat na atraktivitě pro žáky, určitě ale neubírá na přehlednosti. Je zde využíváno nejen barevných rozlišení těch nejpodstatnějších informací a shrnutí, ale i zpřehledňujícího zápisu psacím písmem. Také některé grafy a náčrtky jsou kresleny jakoby ručně a opravdu to přispívá k rychlejší orientaci v textu. U učebnice Odvárko, Kadleček (1998) jsem vyzdvihoval i dvojí roli obrázků. Zde obrázky také plní funkci ilustrující a názornou, funkci motivační v nich však postrádám.

Řazení tematicky příbuzných kapitol je následující: Porovnávání číselných údajů – Postupný poměr – Měřítko – Užití poměru při řešení slovních úloh – Přímá úměrnost – Nepřímá úměrnost – Jiné závislosti – Úměra – Trojčlenka. Uvedená učebnice se liší od předchozích větším rozsahem, který jednotlivým tématům věnuje. Nejvíce prostoru je poskytnuto textům, které jakoby nahrazovaly úplný výklad učitele. Pozitiva jsou zřejmá pro žáky, kteří si z nejrůznějších důvodů ze školy tyto znalosti nepřinesli, nebo chyběli ve škole. Učebnice tak dává prostor i pro samostudium. Navíc již zmiňovaná přehlednost umožňuje, aby se žáci zaměřili pouze na podstatné pasáže. Nevýhodou může být, u tohoto popisně vyčerpávajícího způsobu, že žáci pouze převezmou nabízená řešení a nepokusí se o vlastní.

Nyní se podíváme na téma přímé a nepřímé úměrnosti. Na úvod je vhodně zařazena úloha, kdy mají žáci rozhodnout o tom, zda jsou veličiny na sobě závislé (viz obr. 4.12).

1 Rozhodněte, zda na sobě závisí následující veličiny. Pokud ano, pokuste se závislost matematicky popsat.

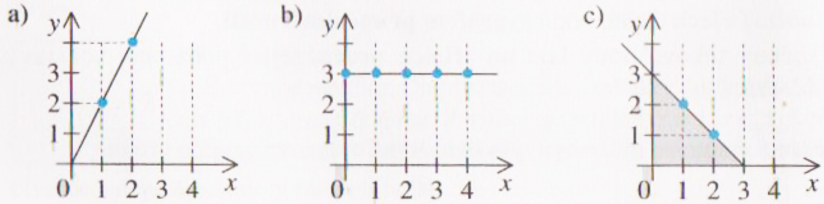
a) Objem železné součástky a její hmotnost.
b) Průměrná rychlost vozidla a doba, za jakou ujede vzdálenost 60 km.
c) Stáří člověka a jeho výška.
d) Rozloha určitého státu v km^2 a počet obyvatel tohoto státu.

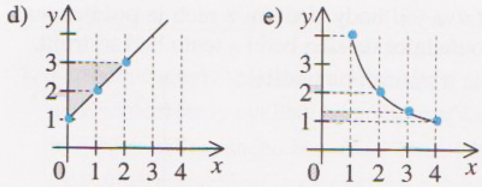
Obr. 4.12: (Šarounová, Růžičková, Vaterová, 1998, s. 51)

Podobná úloha u předchozích učebnic chyběla. Dále autoři nabízejí řešení pomocí tabulky. V ní docházejí výpočtem přes známý vzorec k veličině, která je na první závislá. Pro úplnost jsou zde zařazeny i veličiny bez vzájemné závislosti. Následuje zaměření na první zkoumanou závislost, u které autoři bez jakéhokoliv objevování a návodných otázek ihned přicházejí se závěrem „Kolikrát se zvětší (zmenší) objem železné součástky, tolikrát se zvětší (zmenší) hmotnost součástky“ a pro tento typ závislosti volí termín přímá úměrnost. V textu jsou nicméně pasáže, kde může být uvedený popisný výklad přínosný. Např. opakovaným uváděním vět typu: „Objem a hmotnost železné součástky jsou přímo úměrné.“ si žáci frázi „jsou přímo úměrné“ spojí jednoznačně s přímou úměrností. (Osobně jsem se setkal s případem, kdy žák to takto spojené neměl a ve fyzice nechápal informaci, kterou mu učitel tímto způsobem podával.) Následují čtyři řešené úlohy. U první z nich se pracuje se vztahy mezi údaji v tabulce a dochází se k závěru, že přímo úměrné veličiny se mění ve stejném poměru. Navíc se dochází i k rovnici přímé úměrnosti a sestrojení grafu. U druhé úlohy se z předložených tabulek zkoumá, kde se jedná o přímou úměrnost. V další úloze je úkolem poznat z grafu, jedná-li se o přímou úměrnost, a pokud ano, má žák zapsat její rovnici. Jsou zde předložena řešení dvou imaginárních žáků (viz obr. 4.13), ale není naznačeno, jak s těmito řešeními dále pracovat. To je zřejmě záležitostí učitele.

Poslední řešená úloha ukazuje, jak z úměrnosti zadané rovnicí zkonstruovat graf. Všechny tyto typy úloh jsou pak v různých obměnách předkládány k řešení v jedenácti cvičeních. Myslím, že téma je, co se týká typů úloh, zpracováno vyčerpávajícím způsobem.

4 Který z grafů je grafem přímé úměrnosti? Dokážete napsat rovnici a určit koeficient této úměrnosti?





Řešení

Grafem přímé úměrnosti je množina bodů ležících v přímce, která prochází počátkem soustavy souřadnic. Tento požadavek splňuje pouze graf na obr. a).

Na obrázku a) je graf přímé úměrnosti.

Ostatní grafy znázorňují jiné závislosti, než je přímá úměrnost. Budete se o nich učit později.

Zbývá najít rovnici a koeficient přímé úměrnosti, jejíž graf je na obrázku a). Prohlédněte si, jak si s touto částí úlohy poradili Petr s Honzou.

Petrovo řešení

Podle grafu sestavíme část tabulky přímé úměrnosti

x	1	2	3
y	2	4	6

$2 : 1 = 2 \quad 2 = 2 \cdot 1$

$4 : 2 = 2 \quad 4 = 2 \cdot 2 \quad k = 2$

$6 : 3 = 2 \quad 6 = 2 \cdot 3$

$y = 2 \cdot x$

Koeficient přímé úměrnosti je 2.

Honzovo řešení

V grafu najdeme jednu dvojici proměnných, které k sobě patří: jestliže $x = 2$, je $y = 4$.

$y : x = 4 : 2 = 2$

$\underline{y = 2 \cdot x}$

Koeficient přímé úměrnosti je 2.

Obr. 4.13: (Šarounová, Růžičková, Vaterová, 1998, s. 54–55)

Nepřímá úměrnost je postavená na dvou řešených úlohách, v každé z nich se však řeší řada dílčích úloh. Určuje se, zda jsou dvě nabízené veličiny závislé, objevují se vztahy v tabulce (kolikrát se jedna veličina zvětší, tolikrát se druhá zmenší), dochází se k převrácenému poměru u nepřímo úměrných veličin, doplňuje se tabulka, ve které je zachycená konstantnost součinu dvou nepřímo úměrných veličin, z ní se vyvozuje rovnice, rýsuje graf a pojmenovává vzniklá křivka. Ze vzniklého grafu se odečítají příslušné hodnoty jedním i druhým směrem. Kapitola je uzavřena shrnujícím rámečkem a sadou osmi cvičení. V nich se opět procvičují znalosti získané v řešených úlohách. Kapitola je zpracována relativně vyčerpávajícím způsobem, ovšem chybí práce se zajímavými a netradičními úlohami. Ve cvičeních navíc dominují úlohy bez kontextového zasazení. Učebnice jednoznačně staví na procvičování byť širokého spektra, nicméně pouze standardních úloh bez výrazných obměn.

Za zmínku určitě stojí umístění třístránkové kapitoly Jiné závislosti, ve které se předchozí dvě úměrnosti setkávají v komplexnějších úlohách, zavádí se i lineární závislost daná rovnicí $y = a \cdot x + b$. Je zde nabídka různých řešení téže úlohy, žáci si tak uvědomují rovnocennost nabízených řešení. Relativně dost prostoru je následně věnováno kapitolám Úměra a Trojčlenka. Styl předkládání úloh je stále stejný – zadání s několika otázkami a podrobné řešení.

Závěrem konstatuji, že uvedená učebnice podává zkoumaná témata vyčerpávajícím způsobem, je vhodná i pro samostudium. Je postavená na podrobných řešeních a dostatku úloh k procvičení. Nedostatky vidím v absenci netradičních úloh a v méně atraktivním obsahu úloh.

V učebnici **pozitivně** hodnoceno	V učebnici **negativně** hodnoceno
- dostatečný rozsah	- dominují úlohy bez kontextového zasazení
- vhodná pro samostudium	- nedává prostor pro žákovská řešení
- dostatek prostoru pro procvičení	
- funkce obrázků (názorná, ilustrační)	
- podrobná řešení	
- přítomnost kapitoly Jiné závislosti s komplexními úlohami	
- přehlednost	

Tab. 4.6: Hodnocení učebnice – shrnutí.

4.2.5 MOLNÁR, Josef, et al. *Matematika 7 : učebnice s komentářem pro učitele.* Olomouc : Prodos, 1999.

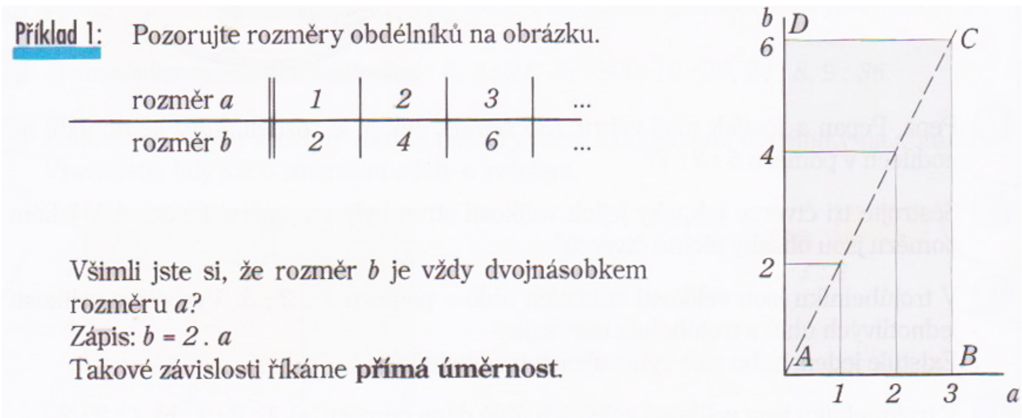
Úvodní řádky věnuji opět charakteristice učebnice samotným vydavatelstvím: „Druhý díl moderní ucelené edice učebnic probírá v devíti lekcích střídavě základy rovinné i prostorové geometrie a aritmetiky. Graficky nadstandardní učebnice obsahuje řadu ilustračních obrázků, grafů a tabulek. Učebnice jsou psány jako text, který vysvětluje postupy řešení matematických úloh i praktické aplikace takto naučených výkonů. Mnohé příklady vycházejí z matematických olympiád, mezinárodní soutěže Matematický klokan apod. Svým originálním pojetím výkladu jsou výborným pomocníkem pro učitele i rodiče žáků.“ (*Prodos* [online], 2011)

Obsahově je učivo uspořádáno v tomto sledu: Zlomky – Shodnost trojúhelníků – Celá čísla – Středová souměrnost a další shodnosti – Racionální čísla – Poměr, přímá a nepřímá úměrnost – Čtyřúhelníky – Procenta – Hranoly. Na první pohled jsou témata řazena s menší návazností, než tomu bylo u předchozích učebnic. Vypozoroval jsem však, že se celkem pravidelně střídají témata z geometrie a aritmetiky, což má zřejmě vést k tomu, aby se žáci nezačali nudit a výuka jim nepřipadala monotónní.

Učebnice mi připadá velmi přehledná. Možná jsem ovlivněn tím, že jsem v minulosti podle ní pracoval a měl možnost si na její strukturu zvyknout. Podstatné informace i čísla úloh jsou zvýrazněny barevným podtiskem, ten je dostatečně kontrastní a na stránkách se člověk rychle orientuje. Řešené příklady jsou odlišeny barevným podtržením. Barev je využíváno vhodně i ve schématech. Je zde pracováno s postranním sloupcem, ve kterém se objevují vysvětlující komentáře, motivační citáty či doplňující informace a úkoly. Obrázky plní roli ilustrační i názornou, méně však motivační. Použité prvky nejsou nadužívány a plní svůj zpřehledňující účel.

Tématu přímé úměrnosti je předsunuta krátká kapitola věnovaná pravoúhlé soustavě souřadnic. Ta nabízí pouze základní poznatky potřebné pro téma přímé a nepřímé úměrnosti a jejich grafů, bez aspirace na nějaké hlubší uchopení pojmu soustavy souřadnic.

Přímá úměrnost je uvedena úlohou na obr. 4.14.


Příklad 1: Pozorujte rozměry obdélníků na obrázku.

rozměr a	1	2	3	...
rozměr b	2	4	6	...

Všimli jste si, že rozměr b je vždy dvojnásobkem rozměru a?
Zápis: $b = 2 . a$
Takové závislosti říkáme **přímá úměrnost**.

Obr. 4.14: (Molnár, 1999, s. 92)

Zde si dokážu představit zařazení úlohy bližší nějaké reálné situaci. Naproti tomu oceňuji, že slovní zápis je doprovázen algebraickým, na který si žáci od začátku mohou zvyknout a je pak pro ně snadnější přijmout rovnice obou úměrností. Následuje výzva k hledání dalších příkladů přímé úměrnosti. Zde je prostor pro uchopení problému konkrétním učitelem, kniha s vlastní nabídkou nepřichází. Od začátku je vyžadována práce s tabulkou i grafem. Dále již autoři přicházejí s rámečkem, ve kterém uvádějí, co je grafem přímé úměrnosti a jakou má rovnici. Ale chybí zde rámeček nabízející definici, co to vlastně přímá úměrnost je. Např. z úvodní úlohy by mohli žáci nabýt dojem, že přímá úměrnost pracuje vždy s dvojnásobkem jedné z veličin. Zvláště při samostudiu je určité riziko, že žáci pojem nepochopí nebo alespoň nad pochopením stráví více času. Ovšem otázkou je, zda je učebnice určena i pro samostudium.

V závěru kapitoly je uvedena sada šesti neřešených cvičení. Jsou to úlohy do určité míry komplexní s řadou dílčích otázek a vztahující se ke konkrétním situacím – nákupy, výměna peněz, závislost dráhy vlaku na čase. Oceňuji vyžadování tabulek a grafů.

Nyní k vlastní nepřímé úměrnosti. Na úvod je předložena neřešená úloha, v níž mají žáci rozhodnout, kdy se jedná a kdy nejedná o již zavedenou přímou úměrnost. Ze čtyř závislostí je pak vybrána závislost, která je následně pojmenována jako nepřímá úměrnost. Přichází rámeček s příslušnou definicí a matematickým vyjádřením vztahu. Až poté následuje řešený příklad – závislost času potřebného na vykonání dané práce na počtu pracovníků. V řešení se opět objevuje práce s tabulkou, grafem i rovnicí nepřímé úměrnosti. Úloh určených k procvičení je méně a navíc jim chybí zařazení do konkrétního kontextu. I v souhrnných cvičeních o 25 úlohách jsem našel pouze jedinou na nepřímou úměrnost a navíc stejného typu jako úloha z výkladové části. Situaci nezachraňuje ani kapitola Trojčlenka, kde je sice relativně dost úloh k procvičení (13), z toho pouhé dvě jsou však na nepřímou úměrnost. Trojčlenka je zde nabízena jako jeden ze třech způsobů řešení. Tyto způsoby řešení jsou překvapivě nabízeny jen pro úlohy na přímou úměrnost. (Osobně dětem přednostně nabízím řešení přes jednotku.) Třetí způsob řešení pracuje s tzv. křížovým pravidlem. Dobré jsou poznámky v krajním sloupci. Ty např. vysvětlují, proč se uvedenému postupu řešení říká právě trojčlenka, či odkazují na využití křížového pravidla v chemii. Problémem je fakt, že chemie je zařazena do 8. ročníku, a tak snaha o propojení pravděpodobně nebude naplněna.

Závěrem musím konstatovat, že uvedená učebnice, byť jako celek má řadu pozitiv, konkrétně téma nepřímé úměrnosti zpracovává, ve srovnání s již hodnocenými učebnicemi, nejméně zdařilým způsobem. Knihu považuji za nevhodnou pro samostudium. Při vhodném uchopení knihy učitelem lze slabá místa eliminovat.

V učebnici **pozitivně** hodnoceno	V učebnici **negativně** hodnoceno
- přehlednost	- zpracování kapitoly nepřímá úměrnost!
- důsledná práce s grafy, tabulkami, rovnicemi	- malý počet úloh
- grafické zpracování učebnice	- nízká typová rozmanitost vyskytujících se úloh
- funkce obrázků (ilustrační, názorná)	- absence postupů řešení
- střídání témat z aritmetiky a z geometrie	- nevhodná pro samostudium

- slovní zápis doprovázen algebraickým	

Tab. 4.7: Hodnocení učebnice – shrnutí.

4.3 Obsahová analýza zahraničních učebnic zaměřená na témata poměr, úměra, úměrnosti

4.3.1 Učebnice používané na švédských školách v návaznosti na kategorizaci úloh používanou ve studiích PISA

Studie (Lundberg, Hemmi, 2009*)* se zaměřila na analýzu jedné sady učebnic (Alfredsson, L. Matematik 4000 kurs A blå, 2008) používaných na švédských školách. Cílem bylo zjistit, jak napomáhají tyto učebnice rozvoji pochopení poměru, úměře, úměrnostem a koeficientům úměrností.

Analýza se zabývala nejprve skladbou úloh podle jejich kognitivní náročnosti. Zde autoři převzali kategorie používané a definované v PISA studiích (PISA 2003) jako tzv. třídy kompetencí – *reprodukce, integrace, reflexe* (viz oddíl 2.2.2).

Jako integrační úloha byla označena například: „Přepište vzorec a rozhodněte, zda *y* je přímo úměrné *x*. Pokud ano, pak určete koeficient úměrnosti.“ (Alfredsson, 2008, s. 204)

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{9} = 0$$

Další kritérium, které při analýze úloh autoři studie použili, bylo opět zvoleno v souladu s kategorizací úloh podle PISA (PISA 2003). Jednalo se o posouzení kontextu úloh. Zde byly převzaty čtyři typy kontextových kategorií – *osobní, vzdělávací a pracovní, veřejný, vědecký* (viz oddíl 2.2.2). Tyto kategorie autoři studie rozšířili o kategorii úloh *intramatematických*, do které zahrnuli úlohy vztahující se pouze k matematickým objektům, symbolům či strukturám.

Následující kritérium třídění úloh se týkalo zařazení do jednoho z následujících typů (viz popis kategorií v oddíle 5.2 Proporcionální uvažování).

- *Úlohy s chybějící hodnotou* – úlohy, v nichž jsou tři zadané údaje a úkolem je najít čtvrtou informaci. Příkladem tohoto typu úlohy ve zkoumané učebnici je: „Odpor závitu z mědi je přímo úměrný délce závitu. Závit dlouhý 1,25 m má odpor 10,5 ohmů. Jak dlouhý závit dává odpor 25,0 ohmů?“ (Alfredsson, 2008, s. 204)
- *Úlohy na číselné porovnávání*
- *Úlohy typu kvalitativní predikce či porovnání*

- *Určení konstanty úměrnosti* – ze dvou proměnných se určuje konstanta úměrnosti. V úlohách jsou zastoupeny typy úměrností uvedené na obrázku 4.15.

Proportion	Direct	Square	Inverse	Square root
Formula	$y = k \cdot x$	$y = k \cdot x^2$	$y = \frac{k}{x}$	$y = \frac{k}{\sqrt{x}}$
In %	53%	20%	20%	7%

Obr. 4.15: Přehled úměrností nalezených v analyzované učebnici (Lundberg, Hemmi, 2009, s. 258)

Na závěr byla analyzována, v návaznosti na PISA studie (PISA 2003), zastoupená struktura zadání úloh – *úlohy s výběrem odpovědi, komplexní s výběrem odpovědi, uzavřené s tvorbou odpovědi, otevřené s tvorbou odpovědi, s krátkou odpovědí* (viz oddíl 2.2.2).

Ve zkoumané učebnici se nachází pět kapitol, v kapitole o funkcích je podkapitola nazvaná grafy a úměrnosti, která se zabývá poměrem, úměrou a úměrnostmi. V učebnici je 43 úloh. Ty jsou rozděleny do tří úrovní obtížnosti (A až C). Navíc se zde vyskytují materiály označené *Activity*, které jsou určené k rozvíjení dovednosti řešení problémů. Analýza byla provedena na všech 43 úlohách.

Nyní shrnu závěry studie. Co se týká zastoupení úloh podle jejich kognitivní náročnosti, reprodukční úlohy se vyskytly nejčastěji (61 %), z 25 % byly zastoupeny úlohy integrační a ze 14 % reflexivní.

Téměř každá úloha z kategorie reprodukce (92 %) byla nejjednodušší A-úrovně (úrovně podle autorů učebnice A až C), 83 % úloh z kategorie integrace bylo středně obtížných (B-úroveň) a polovina reflexivních úloh byla zařazena do B-úrovně a druhá polovina do C-úrovně obtížnosti.

Pokud jde o kontext zadání, nejvíce zastoupeny byly úlohy *intramatematické* (47 %). *Veřejný kontext* byl druhý s výskytem 32 % a *vědecký kontext* třetí (21 %). Žádné úlohy nebyly nalezeny v kategoriích *osobních, vzdělávacích* ani *pracovních*.

Pouze čtyři úlohy byly úlohy typu *s chybějící hodnotou*. Kategorie úloh *číselné porovnávání* byla zastoupena třemi úlohami. Nevyskytly se žádné úlohy typu *kvalitativní predikce a porovnávání*. Typ *určení konstanty úměrnosti* byl zastoupen v sedmnácti případech. Zbytek byl kategorizován jako *ostatní* (18 úloh).

U většiny úloh (54 %) se jednalo o přímou úměrnost. Nepřímá úměrnost byla identifikována u 20 % úloh. Zastoupení dalších typů úměrností ukazuje obrázek 4.15.

4.3.2 Učebnice používané na školách ve Španělsku, Portugalsku, Brazílii a USA

Druhá studie (Ponte, Marques, 2007) se zabývá analýzou čtyř učebnic matematiky používaných v Portugalsku, Španělsku, Brazílii a USA – viz obr. 4.16. Ve všech čtyřech zemích jsou uvedená témata předkládána žákům ve věkové kategorii od 11 do 12 let.

Country	Textbook	Grade level
Portugal	Neves, M. A., Faria, L., & Azevedo, A. (2000). *Matemática* (6.º ano, 2.ª parte). Porto: Porto Editora.	6
Brazil	Lopes, A. J. (2000). *Matemática hoje é feita assim* (6.ª série). São Paulo: FTD.	6
Spain	Colera, J., & Gaztelu, I. (2005). *Matemáticas* (Educación Secundaria – 1). Madrid: Anaya.	7
USA	Maletsky, E. & Askey, R. (2007). *Math*. Orlando: Harcourt Brace & Company.	6

Obr. 4.16: Seznam analyzovaných učebnic. (Ponte, Marques, 2007, s. 40)

Z hlediska metodologie autoři studie použili techniku obsahové analýzy, a to ve dvou rámcích:

1) Globální analýza učebnic a následná analýza úloh.

První rámec bere v úvahu fyzický vzhled, dostupnost jazyka, povahu a roli ilustrací, strukturu kapitol. V souvislosti s tématem úměry řeší, jak je pojem představen, co mu předchází a jaké jsou klíčové pojmy a jaké nabízí strategie pro řešení úloh.

2) Druhý rámec souvisí s konkrétními úlohami, které posuzuje ze tří hledisek:

- *Kognitivní náročnost* je klasifikována dle již popsané kategorizace PISA (viz oddíl 2.2.2) – *reprodukce, integrace a reflexe*.
- *Struktura úloh* byla zařazena do tří podkategorií – *uzavřené, částečně otevřené a otevřené*.
- *Kontext úloh* je rozlišován na *intramatematický* a *nematematický*. Nematematické kontexty jsou dále členěny do šesti podkategorií – *denní životní situace* (zahrnují osobní situace nebo situace přímo související s každodenní činností studentů), *školní situace* (situace ve školním kontextu), *profesionální situace* (odpovídají odborným činnostem, kterým se studenti mohou zabývat v profesním životě), *společenské situace* (problémy týkající se života v komunitě a ve společnosti), *ostatní oblasti* (zahrnují úkoly z předmětů, jako je fyzika, zeměpis, sport, jazyk apod.), *fantazie/fikce*.

Z analýzy vyplynulo, že všechny učebnice používají jazyk přístupný a vhodný pro věkovou kategorii studentů 11–12 let. Všechny jsou bohatě ilustrovány. Obrázky však často nepředstavují relevantní informace ve vztahu k řešení.

Americká učebnice se odlišuje vyšším důrazem na opakování. Další odlišnost se týká lineárního či spirálovitého způsobu výkladu. Portugalské a španělské učebnice výklad nabízejí v komplexně pojatých celcích, respektují lineární uspořádání učiva. Brazilské a americké učebnice přibližují pojmy v různých fázích učebnice, představují tedy spirálovité uspořádání učiva.

Učebnice z Brazílie nabízí problémové situace a využívá jejich potenciál v diskusi, prezentaci a systemizace pojmů. V ostatních třech učebnicích se předpokládá, že žáci musí nejprve pochopit vysvětlení a řešené příklady a poté vyřešit sadu reprodukčních a integračních úloh. Brazilská učebnice představuje relativně vyšší množství kognitivně náročných úkolů. Matematické formalizaci předchází rozšířený dialog s žáky.

Americká učebnice nabízí větší množství úloh, čímž dává učitelům více volnosti při vytváření vlastního uspořádání učiva, s individualizací jak pro sebe, tak pro žáky. V portugalské učebnici je zarážející převažující počet úloh z kategorie reprodukce.

V portugalské učebnici je výklad úměry založen na předchozím studiu zlomků. Totéž platí pro španělskou učebnici, která také navazuje na předchozí téma procenta. V brazilských a amerických učebnicích studium poměru a úměry staví na práci se zlomky, rovnicemi, výrazy a závislostmi.

Ve všech zemích, s výjimkou Španělska, učebnice začínají kapitolu o přímé úměrnosti zavedením poměru. Španělská učebnice začíná kapitolu rozborem vztahů mezi veličinami. Tento přístup vede k těsné souvislosti s pojmem funkce a rozvíjí práci s tabulkou. Na druhou stranu opomíjí pojem poměru a práce se zlomky. V brazilské a americké učebnici je zřetelný výše zmiňovaný spirálovitý způsob výkladu. Po představení pojmu přímé úměrnosti se k přímé úměrnosti minimálně jednou vrací. Portugalské a španělské učebnice pracují s přímou úměrností pouze jednorázově.

Z pohledu nabízených strategií řešení je v brazilské a v portugalské učebnici využíváno obecného algebraického nástroje – *rovnice*, americké učebnice využívají *křížové pravidlo*, resp. *křížový součin* a španělské učebnice *pravidlo tří, resp. trojčlenku* jako hlavní strategie řešení úloh. Některé učebnice představují více než jednu strategii. Například portugalská učebnice dále nabízí *trojčlenku* a výpočet přes *jednotkovou hodnotu*. Španělská učebnice představuje také *trojčlenku* a *křížové pravidlo*. Tato učebnice však představuje schéma tohoto pravidla spíše formálně, bez požadavku na hlubší pochopení.

Ve všech analyzovaných učebnicích převládají *integrační* úlohy. Americká učebnice nabízí vyšší množství *reprodukčních* úloh. *Reflexivní* úlohy jsou v malém množství zastoupeny ve všech učebnicích. Je zajímavé poznamenat, že americká učebnice má vyšší obtížnost *reflexivních* i *reprodukčních* úloh.

Otevřené úlohy lze identifikovat pouze v brazilské a v americké učebnici. Učebnice nabízející úlohy s výraznějším podílem *otevřených otázek* je brazilská.

Výrazný je silný důraz americké učebnice na *matematické kontexty*, zatímco ostatní učebnice zdůrazňují ty *nematematické*.

Přehledné výsledky analýzy z hlediska *kognitivní náročnosti, struktury a kontextu* úloh nabízí tabulka 4.8.

		Portugal	Spain	Brazil	USA
Cognitive demand	Reproduction	34	29	22	41
	Connection	62	68	68	47
	Reflection	4	3	10	12
Structure	Open	0	0	4	1
	Semi open	1	0	9	9
	Closed	99	100	89	90
Context	Mathematical	35	26	39	83
	Same topic	*26*	*26*	*19*	*66*
	Between topics	*9*	*0*	*20*	*17*
	Non mathematical	65	74	61	17
	Daily life situations	*5*	*2*	*3*	*2*
	School situations	*12*	*1*	*6*	*1*
	Professional situations	*13*	*11*	*8*	*0*
	Life in society	*34*	*58*	*32*	*9*
	Other areas of knowledge	*1*	*2*	*10*	*5*
	Imagination/fiction	*0*	*0*	*2*	*0*

Tab. 4.8: Kognitivní náročnost, struktura a kontext úloh v uvedených učebnicích (v %). (Ponte, Marques, 2007, s. 45)

4.3.3 Učebnice používané v tureckých školách

Textbooks	*Publishing company*
Göğün, Y. (2010). Mathematics textbook: Grade 6	Özgün press/Ankara
Toker, Z. (2010). Mathematics textbook: Grade 7	Dorukkaya press/Ankara
Aydın, N., & Beşer, Ş. (2010). Mathematics textbook: Grade 8	Tuna press/Ankara

Obr. 4.17: Učebnice vybrané pro analýzu v této studii. (Bayazit, 2012, s. 12)

Studie (Bayazit, 2012) zkoumala nové sady učebnic matematiky (viz obr. 4.17) určené pro 6. až 8. ročníky tureckých základních škol. Studie se pokusila nalézt odpověď na následující otázky:

1) Jaké typy úloh jsou prezentovány v učebnicích a jaké je jejich rozložení?

2) Jaké typy úvodních úloh jsou použity v kapitolách souvisejících s tématy poměr, úměra a úměrnosti?
3) Jaké jsou kontexty úloh?
4) Jaká je úroveň kognitivní náročnosti úloh?

Důvodem zacílení této studie právě na téma poměru, úměry a úměrností vychází z přesvědčení autorů, že proporcionální uvažování by mělo být integračním tématem v matematice.

Studie pracovala s kategorizací úloh podle Smithe a Steina (1998), jejichž model rozděluje úlohy podle kognitivní náročnosti do následujících úrovní:

1) *Nižší úroveň, zapamatování, reprodukce* (přiřazen kód Low-M):
Zapamatování a reprodukce dříve získaných faktů, pravidel, vzorců nebo definic. Úlohy vyžadují přesnou reprodukci dříve získaných znalostí. Vyžadovaná odpověď je jasně a jednoznačně předurčená.

2) *Nižší úroveň, postupy bez integrace* (přiřazen kód Low-P):
Postupy jsou algoritmické. Vyžadují minimální kontrolu po úspěšném řešení. Nabízejí malý stupeň volnosti ve způsobech řešení. Jsou zaměřeny na procvičování a nalezení správné odpovědi než na rozvoj matematického porozumění. Nevyžadují vysvětlení postupu řešení.

3) *Vyšší úroveň, postupy s integrací* (přiřazen kód High-P):
Postupy jsou používány za účelem rozvoje hlubšího porozumění matematickým pojmům. Rozvíjejí hlubší koncepční myšlenky na rozdíl od úzce použitelných algoritmů. Obvykle jsou zastoupeny v několika reprezentacích. Obecné postupy mohou být dodrženy, ale s podmínkou jejich pochopení. Postup řešení vyžaduje hlubší koncepční myšlení a porozumění.

4) *Vyšší úroveň, „dělání matematiky“* (přiřazen kód High-DM):
Tato úroveň vyžaduje složité a nealgoritmické uvažování (opakem je používání předvídatelných a dobře nacvičených postupů). Žáci jsou vyzýváni ke zkoumání pravidel a vedeni k pochopení podstaty matematických pojmů, postupů a vztahů. Řešení se neobejdou bez reflexe vlastních poznávacích procesů. Zadání vyžadují, aby žáci analyzovali úlohu a aktivně zkoumali její reálná omezení. Řešení vyžaduje značné kognitivní úsilí.

Analýze bylo podrobeno celkem 174 úloh věnovaných poměru, úměře a úměrnostem.

Makroanalýza zjišťovala počet úloh souvisejících s tématy poměr, úměra a úměrnosti a jejich rozložení v jednotlivých kapitolách. Kromě toho úlohy byly kódovány a tříděny podle druhu úměrnosti (*přímá úměrnost a nepřímá úměrnost*), dále byly zařazovány do tří kategorií – *aktivity, řešené příklady* a *úlohy určené k procvičování*. *Aktivity* mají být prostředkem k vlastnímu objevování zákonitostí a pravidel. *Řešené příklady* směřují k ilustrování principu a klíčových vlastností poměru, úměry či úměrností a souvisejících postupů. *Cvičení* jsou určená k procvičování zejména při domácí přípravě.

Mikroanalýza zahrnovala přezkoumání úloh ze tří pohledů: použité reprezentace (*slovní, symbolická, obrazová*), kontexty úloh (*intramatematické, nematematické*) a úrovně kognitivní náročnosti úloh (*nižší, vyšší* – viz výše uvedená kategorizace podle Smithe a Steina (1998)).

Příklady úloh zařazených do vybraných kategorií uvádím dále.

Úloha 1 (kategorie: cvičení, Low-P):

„Hospodyně používá 100 g pracího prášku na vyprání 5 kg prádla.

Jaké množství prádla vypere s 12 kg pracího prášku?“ (Toker, 2010, s. 98)

Úloha 2 (kategorie: Low-M):

„O jaký druh úměrnosti (přímou či nepřímou) se jedná u následujících závislostí?

- Počet pracovníků a množství práce, kterou vykonají.
- Množství prádla a množství pracího prostředku na jeho vyprání.
- Množství přívodů vody a čas na naplnění bazénu.“ (Toker, 2010, str. 96).

Úloha 3 (kategorie: Low-P):

„750 ml šťávy se získá z 2 kg grapefruitu.

Kolik ml šťávy se získá ze 4 kg grapefruitu?“ (Göğün, 2010, s. 174).

Úloha 4 (kategorie: cvičení, High-P):

„Budova vrhá 12 m dlouhý stín. 1,8 metrů dlouhá tyč poblíž budovy vrhá stín dlouhý 3 m.

Určete, jak vysoká je budova.“ (Aydin, Beşer, 2010, s. 148)

Úloha 5 (kategorie: aktivity, High-DM):

„Změřte počet tepů vašeho srdce za dobu 15 sekund.

Odhadněte, kolik tepů byste naměřili za 1 minutu, 5 minut a 1 hodinu.

Určete vztah mezi počtem tepů a odpovídajícím časem. Své závěry diskutujte se spolužáky. Nakreslete grafy této závislosti u čtyř svých spolužáků.“ (Toker, 2010, s. 97)

Výsledky výzkumu ukázaly, že zkoumané turecké učebnice dávají výrazně více prostoru přímé úměrnosti. Pouze 13 úloh ze 174 bylo postaveno na nepřímé úměrnosti. Celkově polovina z analyzovaných úloh byla z kategorie *cvičení*, 43 % *řešených příkladů* a 7 % z kategorie *aktivit*. Zastoupení jednotlivých reprezentací (slovní 27 %; slovní a symbolická 16 %; slovní a obrazová 36,3 %; slovní, symbolická a obrazová 20,7 %) ukazuje, že slovní reprezentace jsou převážně jazykové. Kombinace dvou nebo tří reprezentací byla použita u celkem 73 % úloh, tedy pouze 27 % úloh bylo ve formě jediného typu reprezentace. Více než polovina úloh (57 %) obsahuje vizuální prvky. Zajímavé je rozvržení vizuálních prvků v učebnicích pro jednotlivé ročníky – 50 % v učebnici pro 6. ročník, 33 % pro sedmý a 95 % pro 8. ročník. Většina úloh (61,5 %) se týkala nematematických kontextů a jejich distribuce v jednotlivých ročnících byla – 6. ročník 45 %, 7. ročník 73 % a 8. ročník 56 %. Pouze 6 % bylo zasazeno do vědeckého kontextu (biologie, fyzika, zeměpis) a zbývajících 94 % se týkalo každodenní činnosti žáků, školních situací, sportovní činností a dalších oblastí života. Matematické kontexty (celkové zastoupení 68,5 %) byly zastoupeny postupně v jednotlivých ročnících z 55 %, 27 % a 44 %. Rozložení úloh podle jejich kognitivní náročnosti ukazuje tabulka 4.9.

		6. ročník		7. ročník		8. ročník		(n/%)	
		n	%	*n*	%	*n*	%	*n*	%
Lower-L-CD	Low-M	1	2.6	2	2.5	0	0.0	3	1.7
	Low-P	10	26.4	25	31.6	5	8.7	40	23.0
Higher-L-CD	High-P	19	50.0	42	53.2	50	87.7	111	63.8
	High-DM	8	21.0	10	12.7	2	3.6	20	11.5
celkem	(*n*/%)	38	100	79	100	57	100	174	100

Tab. 4.9: (Bayazit, 2012, s. 22)

Výsledky dále ukázaly, že 24,7 % úloh bylo zařazeno do nižší úrovně jejich kognitivní náročnosti, z toho výrazná většina byla úrovně Low-P. 75,3 % úloh bylo vyšší úrovně kognitivní náročnosti, z toho většina byla úrovně High-P. Zastoupení High-DM úloh se postupně snižovalo z 21 % v šesté třídě přes 13 % v sedmé třídě na 4 % v osmé třídě.

Ze studie vyplynuly některé další závěry. Ukázaly, že nové učebnice představují koncepci poměru, úměry a úměrností celostním způsobem využívajícím spirálovitého rozšiřování učiva. Dostatek prostoru věnují dialogu s žáky prostřednictvím aktivit a řešených příkladů, které vždy předcházejí formalizaci pojmů. V učebnicích jsou nabízeny algoritmické postupy – *trojčlenka a křížový součin*, nicméně ty jsou prezentovány přes prozkoumání a pochopení těchto pravidel na základě reálných situací a ilustrativních modelů. Učebnice poskytují žákům možnost integrace jednotlivých matematických témat (geometrie, funkce, zlomky, trigonometrie) i propojení s nematematickými kontexty. K tomu využívají různých reprezentací – tabulek, modelů, grafů. Zjištěné charakteristiky úloh vytvářejí podmínky pro podporu proporcionálního uvažování u žáků. Negativa lze vidět v menším zastoupení úloh na nepřímou úměrnost a úloh nezařaditelných do přímé ani nepřímé úměrnosti. Takové úlohy byly přítomny pouze v symbolických reprezentacích a v ryze matematických kontextech.

4.4 Hlubší analýza vybraných českých učebnic vzhledem ke skladbě úloh a cvičení v tématu nepřímá úměrnost

Učebnice, s nimiž oslovení učitelé ve výuce skutečně pracují, jsem analyzoval podrobněji, a to z hlediska vyskytujících se typů cvičení a úloh.

Úlohy a cvičení jsem analyzoval a třídil za prvé podle typu modelu, k jehož vytvoření v mysli žáka mohou vést. Při popisu úloh níže budu používat stručnější vyjádření „úloha je příkladem zdánlivého modelu“, což je však nutno chápat jako „pochopení úlohy a jejího řešení může pro žáka být zdánlivým modelem“. Terminologie pro vybrané kategorie modelů je volena dle Hejného konstruktivistické teorie poznávacího procesu (Hejný, Kuřina, 2001). U každého modelu uvádím zkratku, se kterou dále pracuji při označování úloh.

Ne-model – NM

Zdánlivý model – ZM

Překvapivý model – PM

Zkoumané úlohy a cvičení jsem dále třídil podle kontextu jejich zadání:

Ryze matematický kontext – MK

Nematematický kontext – NK

Dále jsem rozdělil úlohy na:

Standardní – SÚ

Nestandardní – NSÚ.

U každé z úloh a cvičení rozlišuji úlohy a cvičení:

S uvedeným řešením – Ř

Bez nabídnutého řešení – NŘ.

Dalším rozlišovaným znakem je:

Gradovaná úloha – G

Konečně jako posledním kritérium třídění úloh jsem zvolil:

Počet kroků při řešení dané úlohy – K1 až K3

Vybrané kategorie jsem volil i v návaznosti na rozhovory s učiteli (viz kapitola 7). Někteří z nich (MH) preferovali vlastní skladbu nabízených úloh. Ty si většinou sestavovali z různých řad učebnic, kombinovali je s vlastními či převzatými a upravenými pracovními listy. Z rozhovorů vyplynula také určitá identifikace s filozofií prof. Hejného, resp. s jeho analýzou poznávacího procesu a se strukturou učebnic, na nichž se autorsky podílel. Proto jsem považoval za vhodné podrobit tyto učebnice a další materiály rozboru právě na základě zvolených modelů.

K zjištění skladby úloh a cvičení podle přítomného kontextu jsem přikročil v návaznosti na žákovskou motivaci s odkazem na Hejného strukturu konstruktivistického poznávacího procesu – motivace jako první fáze poznávacího procesu. Dalším důvodem byl i přikládaný význam kontextového zasazení úloh v předchozích studiích (viz oddíl 4.3).

Předposlední kritérium opět vzešlo z opakovaného důrazu jednoho ze zkoumaných učitelů na přítomnost gradovaných sérií úloh. Za gradovanou úlohu označuji tu, která se typově již v předchozím textu vyskytla, došlo v ní však ke zvýšení obtížnosti (např. použitím jiných číselných reprezentací – zlomků; výskytem nadbytečných informací apod.). Gradaci u každé z úloh přiřazuji přirozené číslo (G1, G2, …), podle toho, o jaký stupeň gradace v daném typu úlohy se jedná.

Pro rozlišení úloh a cvičení na standardní/nestandardní jsem se řídil následujícím vymezením:

Standardní úlohy (SÚ) jsou ty úlohy a cvičení, které se typově shodují s úlohami a cvičeními vyskytujícími se alespoň ve dvou jiných zkoumaných učebnicích (viz oddíl 4.2). Toto kritérium se vztahuje na přítomnost úloh a cvičení v kapitole nepřímá úměrnost a v kapitolách příbuzných (poměr, přímá úměrnost, jiné závislosti, pravoúhlá soustava souřadnic).

Nestandardní úlohy (NSÚ) jsou ty, které nevyhovují kritériu pro zařazení mezi úlohy standardní.

V posledním kritériu jsem se snažil určit kognitivní náročnost podle počtu kroků potřebných k řešení dané úlohy. Zde jsem rozlišil:

Jednokrokové úlohy (K1) – to jsou především takové, kde je zadaná jednotková či jednotná hodnota.

Dvoukrokové úlohy (K2) – jedná se o úlohy, kde zadaná hodnota není jednotková ani není celočíselným násobkem hledané hodnoty.

Tříkrokové úlohy (K3) – příkladem takové úlohy může být *složená trojčlenka* (viz oddíl 5.1).

4.4.1 ODVÁRKO, Oldřich; KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 7. ročník základních škol, 2. díl : Poměr, Přímá a nepřímá úměrnost, Procenta.* Praha : Prometheus, 2007.

Analyzované úlohy jsou vybrány z kapitol Nepřímá úměrnost, Graf nepřímé úměrnosti, Úlohy na závěr, Souhrnná cvičení. Ze Souhrnných cvičení jsem vynechal ta, která jsou zaměřená na téma Poměr. Na některých příkladech se pokusím konkrétně popsat, jak jsem uvažoval při zařazování té které úlohy či cvičení do příslušné kategorie. Dále se pokusím zdokumentovat v učebnici předkládané strategie řešení úloh.

V kategorii dvoukrokových úloh jsem v učebnici narazil na následující typy úloh a cvičení. Zaprvé je to typ úloh a cvičení, kde není zadána jednotková hodnota jedné proměnné. V rámci tohoto typu lze dále rozlišit:

a) úlohy a cvičení se zadanou tabulkou (viz obr. 4.23)

Překresli si tabulku dvakrát do sešitu. Potom doplň **druhý řádek tabulky** tak, aby závislost y na x byla

a) nepřímá úměrnost,
b) přímá úměrnost.

x	1	2	0,5	4	$\frac{1}{4}$
y		4			

Obr. 4.23: (Odvárko, Kadleček, 2007, s. 34)

b) slovní úlohy a cvičení (viz obr. 4.24)

Když do prázdného bazénu začne přitékat voda rychlostí 3 hektolitry za minutu, bazén se naplní za 5 hodin. Za jak dlouho by se bazén naplnil výkonnějším čerpadlem, které přivádí do bazénu 750 litrů za minutu?

Obr. 4.24: (Odvárko, Kadleček, 2007, s. 35)

Uvedené rozlišení úloh a cvičení jsem zvolil s ohledem na možné strategie jejich řešení. Pokud by řešení úlohy na obrázku 4.24 opět vedlo přes tabulku, nebylo by potřebné rozlišovat tyto dva typy dvoukrokových úloh. Nicméně někteří žáci řeší uvedenou úlohu úvahou tak, že si vypočítají součin obou proměnných (v tomto případě rychlosti a času) a dostávají sémanticky pojmenovatelný výsledek – dráhu. Ze známé dráhy pak podobným způsobem vypočítají rychlost, popř. čas. Jsem přesvědčený, že uvedený způsob řešení, pokud by byl podporován dalšími podobnými izolovanými modely, by mohl být správným předpokladem k budoucímu zobecnění rovnice nepřímé úměrnosti. Je škoda, že v uvedené učebnici, byť se zde zavádí rovnice, konstantní součin $k = y \cdot x$, není více využit potenciál směrem k reálnosti konstanty *k*. Dalším příkladem cvičení podobného typu, kde konstanta *k* má svůj sémantický obsah (objem vody v jámě), je cvičení na obr. 4.25.

Pumpou, která čerpá vodu rychlostí 3,5 litru za sekundu, se voda ze stavební jámy vyčerpá za 35 minut.

a) Zjisti, za kolik minut by se voda z jámy vyčerpala pumpou, která čerpá 7,4 litru vody za sekundu.
b) Jakou rychlost čerpání by musela mít pumpa, aby se voda z jámy vyčerpala nejdéle za 25 minut?

Obr. 4.25: (Odvárko, Kadleček, 2007, s. 35)

Další typ nabízené strategie řešení je v úlohách a cvičeních pracujících s vyjádřením nepřímé úměrnosti pomocí rovnice (viz obr. 4.26). Zde je však nutné si uvědomit, že tento model je již modelem značně abstraktním a pravděpodobně žáci v sedmém ročníku jej jako generický ve většině používat nebudou (potvrzeno v rozhovorech s učitelkou MH). To se dá předpokládat až v souvislosti s tématem funkce, až se žáci setkají s dostatečným počtem izolovaných modelů. Přijetí tohoto abstraktního modelu naráží na další fakt potvrzený vývojovou psychologií (Čáp, Mareš, 2001), žáci v této věkově skupině (11–13 let) nemusejí mít dostatečně rozvinuté abstraktně-logické myšlení.

$x\left(\frac{km}{h}\right)$	70	80	90	100	110	120
y (h)	2,89	2,53	2,42	2,02	1,84	1,68

Pro každou hodnotu x z prvního řádku jsme vypočítali y podle vzorce

$$y = \frac{202}{x}.$$

Je to pravda?

Obr. 4.26: (Odvárko, Kadleček, 2007, s. 45)

Další nabízenou strategií řešení by mohla být grafická reprezentace nepřímé úměrnosti. Nicméně z řady úloh, které pracují s grafem nepřímé úměrnosti, žádná nenabízí dostatečný stupeň zobecnění. Pouze ve cvičení 4 na straně 46 (viz obr. 4.27) dochází ke konfrontaci grafu nepřímé úměrnosti s jinou závislostí. Ale stupeň zobecnění, který úloha nabízí je stále nízký.

Závislost y na x je dána tabulkou:

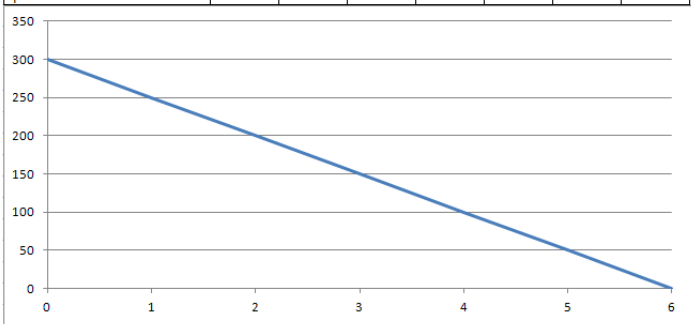
x	5	15	25
y	25	15	5

a) Ukaž, že tato závislost není ani přímá, ani nepřímá úměrnost.
b) Změň jedno číslo v druhém řádku tabulky tak, aby tabulka popisovala nepřímou úměrnost.
c) Sestroj graf původní závislosti i graf vytvořené nepřímé úměrnosti.

Obr. 4.27: (Odvárko, Kadleček, 2007, s. 46)

Typ úlohy, kde by byl požadavek na vyšší míru obecnosti naplněn, by mohl např. pracovat se zdánlivými modely. Takový jsem například zaznamenal na náslechu (BN1) a druhý mi v rozhovoru popsala paní učitelka MH. V prvním případě se jednalo o závislost ceny zboží a slevy. S touto úlohou se v hodině však dále nepracovalo. V druhém případě šlo o závislost doby letu a množství paliva v nádrži letadla. Na obrázku 4.28 nabízím řešení tak, jak mi jej popsala paní učitelka. Při řešení pracovali žáci jak s tabulkou, tak s grafem, který následně porovnali s grafem nepřímé úměrnosti.

doba letu	start	1 hod.	2 hod.	3 hod.	4 hod.	5 hod.	6 hod.
množství benzínu v nádrži	300 l	250 l	200 l	150 l	100 l	50 l	0 l
spotřeba benzínu během letu	0 l	50 l	100 l	150 l	200 l	250 l	300 l



Obr. 4.28

Chtěl bych také upozornit na omezení grafického modelu. Ten lze úspěšně použít, rozlišujeme-li, o jaký typ závislosti se jedná. Pokud bychom však chtěli využít tuto reprezentaci k určení neznámé hodnoty, zde graf již selhává. Přesného výsledku bychom se dočkali až aplikováním rovnice či tabulky, což už jsou jiné modely a jiné strategie řešení uváděné výše.

V návaznosti na předchozí zmínku o zdánlivém modelu upozorňuji, že v uvedené učebnici práce se zdánlivým modelem chybí.

Posledním typem nabízené strategie řešení je trojčlenka.

Pokud jde pouze o rozlišení druhu závislosti – přímá úměrnost, nepřímá úměrnost, jiná závislost, a nikoliv o výpočet neznámé, můžeme rozšířit seznam nabízených strategií o poučky:

- přímá úměrnost: kolikrát více (méně), tolikrát více (méně)
- nepřímá úměrnost: kolikrát více (méně), tolikrát méně (více)

a již uváděný

- graf

U zmíněných pouček pak lze vhodně zařadit zdánlivé modely:

- o kolik více (méně), o tolik více (méně)
- o kolik více (méně), o tolik méně (více)
- čím více (méně), tím více (méně)
- čím více (méně), tím méně (více),

které, jak už jsem zmínil, však v učebnici přítomny nejsou.

Výskyt gradace mohu dokumentovat na cvičení – viz obr. 4.25. V učebnici sice není úloha *„Jakou rychlost čerpání by musela mít pumpa, aby se voda z jámy vyčerpala nejdéle za 25 minut?“*, ale typově podobné úlohy se zde nacházejí. Gradační posun je ve formulaci „nejdéle za“.

Co se týká úloh a cvičení, které pracují s tzv. ne-modelem, zde jsem za ne-model označoval v převážné míře úlohy a cvičení, které jsou postavené na přímé úměrnosti. Vhledem k tomu, že do výzkumu byly zařazeny pouze úlohy a cvičení z témat věnovaných nepřímé úměrnosti a témat následujících, považuji označení přímé úměrnosti za ne-model nepřímé úměrnosti za opodstatněné. Jako příklad ne-modelu uvádím dvě cvičení. Ve cvičení na obr. 4.29 se vyskytuje jak model přímé, tak nepřímé úměrnosti, ale je zde i model závislosti, která nepatří ani do jednoho z předchozích typů. Jedná se o úlohu s ryze matematickým kontextem. Příklad ne-modelu jsem našel i mezi úlohami s nematematickým kontextem. Je zachycena na obr. 4.30. Toto cvičení je zařazeno též do kategorie nestandardních úloh.

Následujícími tabulkami jsou popsány tři závislosti y na x.

A

①

x	1	2	3	4
y	5	10	15	20

②

x	1	2	3	4
y	12	6	4	3

③

x	1	2	3	4
y	15	6	5	3

B

①

x	1	2	3	4
y	12	9	6	3

②

x	1	2	3	4
y	4	8	12	16

③

x	1	2	3	4
y	24	12	8	6

Pro každý z případů ①, ② a ③ řeš tyto úkoly:

a) Rozhodni, zda jde o přímou úměrnost, nepřímou úměrnost, nebo o jinou závislost.

b) Pokud zjistíš, že jde o přímou nebo o nepřímou úměrnost, urči její koeficient a zapiš ji vzorcem.

c) Sestroj graf závislosti y na x v pravoúhlé soustavě souřadnic Oxy.

Obr. 4.29: (Odvárko, Kadleček, 2007, s. 50)

Pepova hádanka. Jeden člověk vykope studnu za 100 hodin. Za jak dlouho vykope stejným tempem takovou studnu 100 lidí?

Obr. 4.30: (Odvárko, Kadleček, 2007, s. 37)

V uvedených kapitolách jsem objevil jediný překvapivý model nepřímé úměrnosti (viz obr. 4.31). V učebnici se také neobjevila žádná tříkroková úloha typu složené trojčlenky.

Pro přemýšlivé

a) Zapiš číslo 12 několika způsoby jako *součin* dvou kladných čísel. Je první činitel *nepřímo úměrný* druhému činiteli, nebo je *přímo úměrný* druhému činiteli?

Obr. 4.31: (Odvárko, Kadleček, 2007, s. 35)

Tabulka 4.10 ilustruje zařazení úloh a cvičení z jedné kapitoly (Nepřímá úměrnost) do výše uvedených kategorií. Zařazení úloh a cvičení z dalších kapitol (Graf nepřímé úměrnosti, Úlohy na závěr a Souhrnná cvičení) ukazují tabulky umístěné v příloze X1.

kapitola: *Nepřímá úměrnost*												
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**SÚ**	**NSÚ**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu, cvičení v učebnici												
úloha A a) na straně 33	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha A b) na straně 33	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha A c) na straně 33	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha B a) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha B b) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha B c) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 1 a) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 1 b) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 2 a) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G2
cvičení 2 b) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G2
cvičení 3 a) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 3 b) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 a) na straně 35	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 b) na straně 35	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha C na straně 35	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 5 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 6 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 7 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 8 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 9 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 10 na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 11 na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G

Tab. 4.10

4.4.2 ROSECKÁ, Zdenka. *Aritmetika 7: Pracovní sešit - přímá a nepřímá úměrnost, trojčlenka, slovní úlohy.* Brno: Nová škola, 1998.

Další „učebnicí“, kterou jsem podrobil stejné analýze je pracovní sešit z nakladatelství Nová škola (Rosecká, 1998). Jedná se sice podle názvu o pracovní sešit, ale koncepcí připomíná spíše cvičebnici. Navíc paní učitelka MH v rozhovorech (viz oddíl 7.3) popsala, že s publikací pracuje jako s učebnicí.

Úlohy zařazené do výzkumu jsou vybrány z kapitol Nepřímá úměrnost – tabulky, Nepřímá úměrnost – úvahy (kolikrát méně … tolikrát více), Nepřímá úměrnost – cvičení (řešení úsudkem), Nepřímá úměrnost – cvičení (řešení úměrou), Nepřímá úměrnost – vyjádření, Úlohy na přímou i nepřímou úměrnost, Slovní úlohy, Tabulky a grafy. Na konkrétních příkladech se pokusím popsat, jak jsem uvažoval při zařazování toho kterého cvičení do příslušné kategorie (viz tabulky v příloze X2).

Dále se pokusím zdokumentovat v publikaci předkládané strategie řešení úloh.

Ohledně předkládaných strategií řešení lze vycházet z názvů jednotlivých kapitol, ve kterých se nabízené strategie (úvahou kolikrát méně … tolikrát více, úsudkem, úměrou – viz obrázek 4.33) a způsoby vyjádření různými reprezentacemi (úvahou, tabulkou, grafem – viz obrázek 4.32) přímo objevují.

V analyzovaných úlohách se vyskytli i takové, které jsem zařadil jak do kategorie *s postupem řešení*, tak do kategorie *bez postupu řešení*. Takto zařazenou úlohou je i příklad 2 a) na obrázku 4.32. V úloze je nabídnutý zápis zadaných údajů i nápověda (kolikrát více … tolikrát méně), samotnou odpověď mají doplnit již žáci.

NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST - vyjádření

Každý vztah mezi dvěma veličinami můžeme vyjádřit: **a)** ***úvahou*** **b)** ***tabulkou*** **c)** ***grafem***

Kolikrát více ..... tolikrát méně
kolikrát méně .... tolikrát více *nepřímá úměrnost*

Př. 2. Na 1 hydraulickém lise se dá zakázka zhotovit za 12 dnů. Kolik dnů bude trvat zakázka *(výroba nerezových koleček)*, když na ní budou pracovat 2 lisy, 3 lisy,…

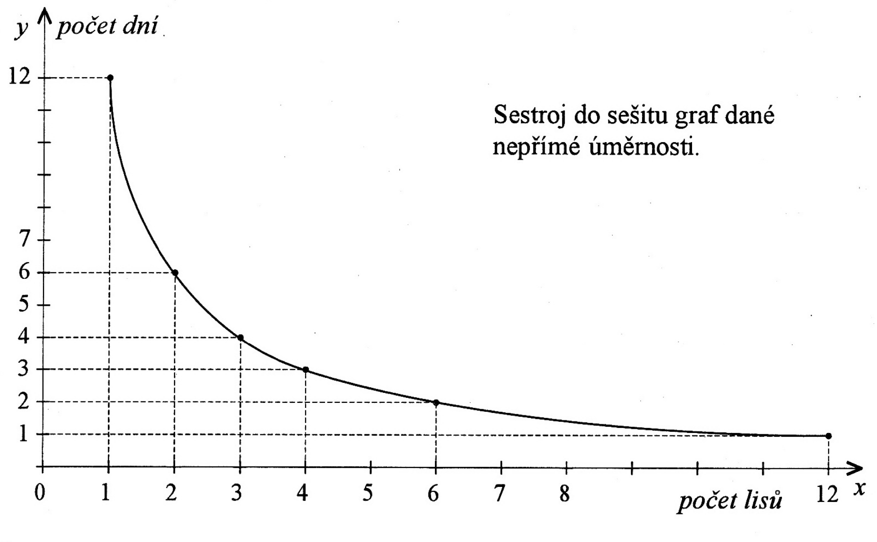
a) *Řešení úvahou*:
1 lis bude pracovat .... 12 dnů
2krát více 2 lisy .... dnů

Kolikrát více lisů bude na zakázce pracovat, tolikrát méně dní bude práce trvat.

b) **1 lis zhotoví zakázku za 12 dnů.** *Doplň tabulku*:

počet lisů	1	2	3	4	5	6	12
počet dní ke zhotovení zakázky	12						

c) Grafické vyjádření nepřímé úměrnosti:

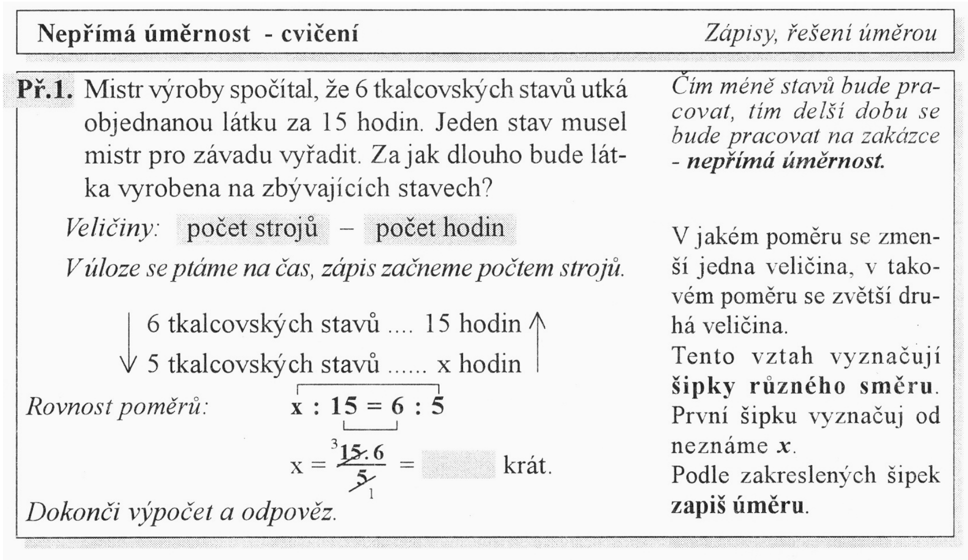


Čti z grafu *(vyznač barevně)*:

a) Jak dlouho bude trvat zhotovení zakázky, když na ní bude pracovat 8 lisů?

b) Kolik lisů musí pracovat, má-li být zakázka splněna za 4 dny?

Obr. 4.32: (Rosecká, 1998, s. 34)



Nepřímá úměrnost - cvičení *Zápisy, řešení úměrou*

Př.1. Mistr výroby spočítal, že 6 tkalcovských stavů utká objednanou látku za 15 hodin. Jeden stav musel mistr pro závadu vyřadit. Za jak dlouho bude látka vyrobena na zbývajících stavech?

Veličiny: počet strojů – počet hodin

V úloze se ptáme na čas, zápis začneme počtem strojů.

6 tkalcovských stavů .... 15 hodin

5 tkalcovských stavů ...... x hodin

Rovnost poměrů: $\mathbf{x : 15 = 6 : 5}$

$x = \frac{\cancel{15}^{3} \cdot 6}{\cancel{5}_{1}} = \quad$ krát.

Dokonči výpočet a odpověz.

Čím méně stavů bude pracovat, tím delší dobu se bude pracovat na zakázce - ***nepřímá úměrnost.***

V jakém poměru se zmenší jedna veličina, v takovém poměru se zvětší druhá veličina.
Tento vztah vyznačují **šipky různého směru**.
První šipku vyznačuj od neznáme $\boldsymbol{x}$.
Podle zakreslených šipek **zapiš úměru**.

Obr. 4.33: (Rosecká, 1998, s. 33)

Učitelka MH v uvedené publikaci kladně hodnotila (viz oddíl 7.3) přítomnost gradovaných úloh, resp. vzrůstající obtížnost v rámci jednoho typu úlohy, která dle názoru učitelky umožňuje větší individualizaci výuky. Z uvedených tabulek jednoznačně vyplývá, že v publikaci je ve srovnání s ostatními učebnicemi nejvyšší výskyt gradovaných úloh a to zejména v kapitolách *Slovní úlohy a Úlohy na přímou i nepřímou úměrnost.* Výskyt gradace dokumentuji na cvičení 2.2 z kapitoly *Slovní úlohy*:

„Kopírovací stroj zhotoví 40 kopií za 1 minutu. Kolik balíků papíru je třeba připravit ke kopírce, která má mít nepřetržitý provoz od 7 h do 9 h? V 1 balíku je 500 listů papíru.“ (Rosecká, 1998, s. 37)

V publikaci se nevyskytla žádná úloha či cvičení z kategorií nestandardní, tříkrokové řešení (typu složené trojčlenky), ne-model, zdánlivý model, překvapivý model.

4.4.3 ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Funkce*. Praha: Prometheus, 2006.

Jedná se o jedinou středoškolskou učebnici, kterou jsem podrobil analýze. Vzhledem k vymezení kategorie standardních, resp. nestandardních úloh (viz oddíl 4.3.2, s. 78) porovnáním úloh mezi jednotlivými učebnicemi tuto kategorii vynechávám. Z uvedené učebnice jsem analyzoval úlohy nacházející se v kapitole Lineární lomené funkce v podkapitolách Nepřímá úměrnost a Úlohy k opakování.

V návaznosti na rozhovor s učitelem JKN, konkrétně na důraz, který přikládal řešení úloh prostřednictvím rovnice, jsem zařazoval úlohy do kategorie K1 – K3 podle následujícího klíče.

5.14 Obsah pravoúhlého trojúhelníku je $18\,\mathrm{cm}^2$.

a) Zapište funkci, která udává závislost mezi velikostmi odvěsen.

b) Jedna z odvěsen má délku 12 cm. Jaká je délka druhé odvěsny?

c) Obdobný úkol jako v b) řešte pro případ, kdy délka jedné odvěsny je 2,5 cm.

5.15 Proud je při konstantním napětí nepřímo úměrný odporu vodiče. Najděte funkci, která udává tuto závislost, víte-li, že při odporu $380\,\Omega$ je proud 30 mA.

5.16 Ozubené kolo o průměru d mm vykoná n otáček za minutu a zasahuje do jiného ozubeného kola o průměru 400 mm, které se otočí za minutu desetkrát. Nalezněte funkci, jež udává závislost n na d.

Obr. 4.34: (Odvárko, 2006, s. 87)

Do kategorie K1 (jednokroková řešení) jsem zařadil například úlohu 5.14 a) na obrázku 4.34. Zde předpokládám řešení (potvrzeno žákovským řešením při náslechu AN1 – viz obr. 7.3, s. 103):

$$a \cdot b = 18$$

$$a = \frac{18}{b}$$

V úloze je zadaný koeficient nepřímé úměrnosti k = 18 m^2. Žák v jednom kroku vyjádří hledanou závislost a na b. Naopak v úloze 5.15 na obrázku 4.34 koeficient nepřímé úměrnosti je třeba v prvním kroku vypočítat a až následně je možné vyjádřit závislost elektrického proudu na elektrickém odporu.

$$I = \frac{U}{R}$$

$$0{,}030 = \frac{U}{380}$$

$$U = 0{,}030 \cdot 380 = 11{,}4\,V$$

$$I = \frac{11{,}4}{R}$$

Tato úloha je zařazená do kategorie K2 (dvoukroková řešení).

Úloha 5.15 by u učebnic pro základní školy byla v kategorii gradace označena kódem G1. Přítomný převod z *mA* na základní jednotku elektrického proudu – *A*, nepovažuji na úrovni střední školy za gradační posun v obtížnosti úlohy. První stupeň gradace jsem přiřadil například úloze 5.7 na obrázku 4.35. Žáci zde musí aplikovat definici klesající funkce na celý definiční obor.

5.6 Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:
$y = \frac{4}{x}$, $y = -\frac{4}{x}$, $y = \left|\frac{4}{x}\right|$, $y = \left|-\frac{4}{x}\right|$.

5.7 Rozhodněte, zda platí: Funkce $y = \frac{1}{x}$ je klesající. Svůj závěr zdůvodněte.

Obr. 4.35: (Odvárko, 2006, s. 81)

Úloha je příkladem zdánlivého modelu klesající funkce, nicméně do kategorie zdánlivý model nepřímé úměrnosti samozřejmě zařazená není. Za zdánlivé modely jsem označil v úloze 5.6 na obrázku 4.35 podúlohy s absolutní hodnotou.

Překvapivý model jsem nalezl v analyzovaných úlohách pouze jeden – úloha 5.16 na obrázku 4.35. Uvědomuji si však relativnost takového zařazení, které je závislé od vnímání zadání konkrétním žákem. Mé zařazení vycházelo z dvoukrokové úvahy. Nejprve vyhodnotím závislost obvodu ozubených kol na počtu otáček za minutu jako nepřímou úměrnost. Až ve druhém kroku uvažuji nad závislostí průměru kol a počtu otáček za minutu. Vycházím z vlastního uvažování při řešení této úlohy. Při něm jsem si uvědomil, pokud by úloha nebyla zařazená v kapitole věnované nepřímé úměrnosti, pravděpodobně bych na začátku přemýšlel, zda hledaná závislost průměru kol a počtu otáček za minutu je skutečně nepřímá úměrnost.

Jako ne-model nepřímé úměrnosti jsem ve většině případů označoval příklady lineárních lomených funkcí, které nejsou nepřímou úměrností.

Z tabulky 4.11 vyplývá vyšší výskyt úloh s ryze matematickým kontextem (62,9 %) oproti úlohám s nematematickým kontextem (37,1 %), nízká četnost v kategoriích překvapivých (1 úloha z 35 celkem, tj. 2,9 %) a zdánlivých (2 úlohy z 35 celkem, tj. 5,7 %) modelů a relativně vysoké zastoupení úloh s gradačním navýšením obtížnosti (37,1 %).

4.4.4 PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK a Šárka MÜLLEROVÁ. *Matematika 7 pro základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2008.

Učebnici používá paní učitelka JS (viz oddíl 7.5). Analýze jsem podrobil úlohy a cvičení z kapitol Nepřímá úměrnost a Trojčlenka (viz příloha X4).

V kapitole Nepřímá úměrnost převládají úlohy s ryze matematickým kontextem. Důraz je kladen na procvičování práce s tabulkou, rovnicí a grafem. V kapitole Trojčlenka jsou rovnoměrně zastoupeny jak úlohy na přímou, tak na nepřímou úměrnost. Mezi úlohami typu ne-model nepřímé úměrnosti se vyskytují pouze úlohy na přímou úměrnost. U řešených úloh jsou nabízeny dvě strategie řešení – trojčlenkou a přes jednotkovou hodnotu. Vlastnosti nepřímé úměrnosti jsou zkoumány prostřednictvím tabulky. Na závěr tématu jsou nabídnuty tři nestandardní úlohy (viz obr. 4.36). Konkrétně cvičení 11 a 12 jsou jediná dvě cvičení v rámci rozebíraných učebnic, která lze zařadit do kategorie K3 (tříkroková řešení typu složené trojčlenky). Úlohy jsou navíc s gradovanou obtížností, která vychází z práce se zlomky a z použití dvojích jednotek času. I ve srovnání s ostatními učebnicemi lze tyto tři úlohy označit jako nejobtížnější.

* 11. Čtyři dělníci položí podlahu tělocvičny za šest hodin. Po hodině společné práce odešel jeden z dělníků k lékaři. Za jak dlouho dokončí práci zbývající tři dělníci?

* 12. Dva brigádnici očešou jablka z 15 jabloní za 5 hodin 20 minut. Po dvou hodinách jim přišli pomoci další tři brigádnici. Za jak dlouho byla očesána jablka z těchto 15 stromů?

* 13. Petr často navštěvuje babičku. Jde-li rychlostí $4\frac{\text{km}}{\text{h}}$, dojde k babičce za 25 minut. Dnes vyšel v 15 hodin 10 minut. Po deseti minutách chůze potkal kamaráda, se kterým si povídal 5 minut.

  a) V kolik hodin dorazil k babičce, jestliže zbytek cesty šel rychlostí $6\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

  b) Jakou rychlostí by musel jít zbytek cesty, aby k babičce došel v 15 hodin 45 minut?

Obr. 4.36: (Půlpán, Čihák, Müllerová, 2008, s. 112)

Za překvapivý model jsem označil cvičení 8 na straně 111 (Půlpán, Čihák, Müllerová, 2008): „Na ušití šatů je třeba 2 m látky široké 150 cm. kolik metrů látky potřebujeme na stejné šaty, bude-li látka široká jen 90 cm?“ Samozřejmě úvaha „kolikrát kratší kus látky, tolikrát širší kus látky při stejném plošném obsahu“ směřuje k identifikování nepřímé úměrnosti. Mé zařazení však vychází z vlastního řešení přes výpočet plošného obsahu látky, kdy jsem až dodatečně přemýšlel nad typem úměrnosti. To mi potvrdilo hypotézu – pokud má koeficient nepřímé úměrnosti reálný význam (zde plošný obsah látky), pak řešení nemusí mít oporu v úvaze typu „kolikrát více, tolikrát méně“.

Výskyt gradované obtížnosti zdokumentuji ještě na cvičení 3 na straně 111 (Půlpán, Čihák, Müllerová, 2008): „Kolik g travního semene musíme koupit na osetí čtvercové zahrady o straně 20 m, jestliže na 8 m^2 potřebujeme 100 g semene?“, kde je potřeba nejprve vypočítat obsah čtvercové zahrady a až poté uvažovat nad řešením příslušné úměrnosti.

4.4.5 Závěr z analýzy vybraných učebnic

Tabulka 4.11 nabízí porovnání výskytu jednotlivých modelů a typů úloh v analyzovaných učebnicích. Z tabulky lze vyčíst:

- V učebnicích Odvárko, Kadleček (2007) a Rosecká (1998), resp. v analyzovaných kapitolách se nachází větší celkový počet úloh (přibližně dvojnásobný) oproti zbývajícím dvěma učebnicím.
- Učebnice Půlpán, Čihák, Müllerová (2008) se od ostatních učebnic liší vyšším relativním výskytem dvou a tříkrokových úloh. Úloha typu K3 se vyskytla pouze v této učebnici.
- Relativní výskyt úloh typu ne-model nepřímé úměrnosti se pohybuje od 28,2 % (Odvárko, Kadleček (2007)) do 43,7 % (Rosecká (1998)).
- Výskyt úloh typu zdánlivého a překvapivého modelu nepřímé úměrnosti byl u všech učebnic minimální.

- Zajímavé výsledky přineslo rozložení úloh podle jejich kontextu. V učebnici Rosecká (1998) je všech 71 analyzovaných úloh zasazeno do reálného kontextu, tj. s nematematickým kontextem. Naopak nejmenší relativní výskyt (37,1 %) úloh s nematematickým kontextem zaznamenala učebnice Odvárko (2006). U zbývajících dvou učebnic byl poměr úloh s matematickým a s nematematickým kontextem přibližně vyrovnaný.
- Výskyt nestandardních úloh byl ve všech případech minimální, v učebnici Rosecká (1998) dokonce nulový.
- Relativní počet řešených úloh byl nejnižší u učebnice Odvárko, Kadleček (2008) (2,8 %) a nejvyšší u učebnice Půlpán, Čihák, Müllerová (2008) (18,8 %). Na základě rozložení úloh v této kategorii lze usuzovat na vhodnost učebnice k samostudiu.
- Relativně nejméně úloh s gradačním navýšením obtížnosti bylo pozorováno u učebnice Odvárko, Kadleček (2007) (18,3 %). Výskyt gradovaných úloh u zbylých tří učebnic byl srovnatelný.

označení modelu, typ úlohy	Odvárko, Kadleček (2007)		Rosecká (1998)		Odvárko (2006)		Půlpán, Čihák, Müllerová (2008)	
	četnost	%	četnost	%	četnost	%	četnost	%
K1	45	63,4	48	67,6	26	74,3	13	40,6
K2	26	36,6	24	33,8	9	25,7	17	53,1
K3	0	0,0	0	0,0	0	0,0	2	6,3
NM	20	28,2	31	43,7	11	31,4	11	34,4
ZM	0	0,0	0	0,0	2	5,7	0	0,0
PM	2	2,8	0	0,0	1	2,9	1	3,1
NK	34	47,9	71	100,0	13	37,1	18	56,3
MK	37	52,1	0	0,0	22	62,9	14	43,8
SÚ	66	93,0	71	100,0			29	90,6
NSÚ	5	7,0	0	0,0			3	9,4
Ř	2	2,8	4	5,6	4	11,4	6	18,8
NŘ	69	97,2	70	98,6	31	88,6	26	81,3
G1	10	14,1	22	31,0	13	37,1	10	31,3
G2	3	4,2	4	5,6	0	0,0	3	9,4
počet úloh celkem	71		71		35		32	

Tab. 4.11: Porovnání výskytu jednotlivých modelů a typů úloh v analyzovaných učebnicích.

5. Výzkumy proporcionálního uvažování a strategií řešení úloh v oblasti úměr a úměrností

5.1 Vymezení pojmů

Nejdříve vymezím některé pojmy a termíny tak, jak jsou používány v českém a anglickém prostředí.

Poměr (anglický ekvivalent: ratio, proportion): Podíl *a : b*, kde *a > 0, b > 0*, nazýváme poměr čísel *a* a *b*. Číslo *a* nazýváme první člen poměru, číslo *b* je jeho druhý člen. Poměr můžeme krátit a rozšiřovat (oba členy poměru dělit nebo násobit stejným nenulovým číslem). Pokud jsou oba členy poměru vyjádřeny nesoudělnými přirozenými čísly, říkáme, že poměr je v základním tvaru. Důležité je pořadí členů poměru. Poměry *a : b* a *b : a* jsou převrácené poměry. Poměr udává, kolikrát je jedna veličina větší (menší) než druhá. Poměrem porovnáváme takové veličiny, které jsou vyjádřeny ve stejných jednotkách.

Postupný poměr a : b : c nahrazuje poměry *a : b, b : c.*

Úměra (anglický ekvivalent: proportion): Úměra je zápis dvou sobě rovných poměrů *a* : *b* = = *c* : *d*. Členy *a, d* se nazývají vnější členy, členy *b, c* se nazývají vnitřní členy úměry. Platí, že součin vnějších členů úměry je roven součinu vnitřních členů úměry *a · d = b · c* (v anglické terminologii se aplikování tohoto postupu označuje jako „cross product algorithm“ či „procedure of cross-multiplication“, které někde překládám jako křížové pravidlo či křížový součin).

Přímá úměrnost (anglický ekvivalent: direct proportion) – Na základní škole se přímá úměrnost zavádí jako závislost mezi hodnotami proměnných *x* a *y*, pro něž platí: „Kolikrát se zvětší (zmenší) hodnota *x*, tolikrát se zvětší (zmenší) hodnota *y*“, popř.: „V jakém poměru se změní hodnota proměnné *x*, v takovém poměru se změní hodnota proměnné *y.*“. Další zpřesňování definice se děje přes zavedení rovnice přímé úměrnosti *y = k · x* pro *x > 0, k > 0*. Později se rozšiřuje definiční obor na $x \in \mathbb{R}$. Grafem přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem soustavy souřadnic (pokud je definičním oborem množina reálných čísel). Přímá úměrnost je zvláštní případ lineární funkce.

Nepřímá úměrnost (anglický ekvivalent: indirect proportion): Na základní škole se nepřímá úměrnost zavádí analogickým způsobem jako přímá úměrnost: „Kolikrát se zvětší (zmenší) hodnota proměnné *x*, tolikrát se zmenší (zvětší) hodnota proměnné *y.*“ Tato závislost mezi hodnotami proměnných *x* a *y* se dále definuje rovnicí $y = k : x$, kde *x > 0, k > 0*. Na střední škole se definiční obor rozšiřuje na $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ pro $k \neq 0$. V oboru záporných reálných čísel již selhává původní definice nepřímé úměrnosti ze základní školy. Grafem nepřímé úměrnosti je rovnoosá hyperbola. Vzhledem k definičnímu oboru se na základní škole rýsuje pouze v 1. kvadrantu souřadnicové soustavy.

Trojčlenka (anglický ekvivalent: rule of three): Trojčlenkou nazýváme úlohu (jindy trojčlenkou označujeme schematický způsob řešení úloh týkajících se úměry), která obsahuje dvojice na sobě závislých veličin – přímo nebo nepřímo úměrných, z nichž tři údaje jsou známé, a čtvrtý je třeba vypočítat. Veličiny se zapíší do určitého schématu, šipkami se vyjádří příslušné závislosti – souhlasně orientovanými šipkami přímá úměrnost, nesouhlasně orientovanými šipkami nepřímá úměrnost. Pro úlohu na přímou úměrnost může schematický zápis vypadat následovně.
Ujede-li automobil za 2 hodiny 140 km, jak daleko dojede za 5 hodin?

<table>
<tr><td rowspan="2">↑</td><td>2 h</td><td>.....................</td><td>140 km</td><td rowspan="2">↑</td></tr>
<tr><td>5 h</td><td>.....................</td><td>x km</td></tr>
</table>

Dále uvádím schematický zápis úlohy na nepřímou úměrnost.
Stáhne-li za ideálních podmínek modem neměnnou rychlostí 25 kb/s soubor za 240 sekund, jak rychle bude soubor stažen po kabelové síti neměnnou rychlostí 750 kb/s?

<table>
<tr><td rowspan="2">↓</td><td>25 kb/s</td><td>.....................</td><td>240 s</td><td rowspan="2">↑</td></tr>
<tr><td>750 kb/s</td><td>.....................</td><td>x s</td></tr>
</table>

Protože v běžném životě se vyskytuje mnoho situací, v nichž se objevuje přímá nebo nepřímá úměrnost, a protože se tyto úlohy dají řešit pomocí trojčlenky, bylo toto schéma jedním z hlavních témat středověké matematiky, zejména tzv. kupeckých počtů (Šarounová, Růžičková, Vaterová, 1998). Pro obecné počítání obchodníků, řemeslníků a ostatních lidí s veličinami přímo či nepřímo úměrnými vznikaly různé mechanické předpisy, pomocí nichž byly úlohy řešeny. Základem většiny těchto předpisů se stala trojčlenka (regula de tri).

Složená trojčlenka obsahuje více poměrů. Příkladem může být úloha: *Dvě tramvaje se otočí třikrát a odvezou 720 lidí. Kolikrát se musí čtyři tramvaje otočit, aby odvezly 960 lidí?* Složená trojčlenka se řešila postupem nazývaným „regula kata“ – počet řetězový (Blažková, s. 4, 2013).

2 tramvaje	....	3-krát	....	720 lidí
4 tramvaje	....	x-krát	....	960 lidí

$$\frac{x}{3} = \frac{960}{720} \text{ (přímá úměrnost)} \cdot \frac{2}{4} \text{ (nepřímá úměrnost)}$$

$$x = 2$$

Proporcionální uvažování (anglický ekvivalent: proportional reasoning): Jedná se o způsoby řešení a uvažování při řešení úloh týkajících se úměry.

5.2 Proporcionální uvažování

Jak uvádí Cramer, Post a Curier (1993), můžeme rozlišit 3 typy úloh pro posuzování úrovně proporcionálního uvažování:

1) Jsou zadány tři hodnoty a úkolem je najít čtvrtou chybějící informaci**.**

Příkladem takovéhoto typu úlohy může být:

Vzdálenost dvou míst A a B na mapě je 3,5 cm. Jejich skutečná vzdálenost činí 70 kilometrů. Vzdálenost dvou míst C a D na téže mapě je 6,2 cm. Jaká je skutečná vzdálenost míst C a D?

2) Numerické porovnání dvou poměrů**.**

Příkladem takové úlohy může být:

Do jednoho džbánu nalijeme dvě sklenice džusu a tři sklenice vody.
Do druhého džbánu tři sklenice džusu a čtyři sklenice vody.
Ve kterém džbánu bude koncentrovanější nápoj džusu?

3) Kvalitativní predikce a kvalitativní porovnání.

Příkladem kvalitativní predikce může být úloha:

Pokud Petr smísí menší množství limonády s větším množstvím vody, než když připravoval nápoj naposledy, bude chuť jeho nápoje tentokrát a) silnější b) slabší c) stejná d) nedá se určit?

Příkladem kvalitativního porovnání je:

Dva kamarádi zatloukali v pravidelných rozestupech určitá množství hřebíků do různých desek. Martin zatloukl více hřebíků než Jirka. Martinova deska byla kratší než Jirkova. Na které z desek jsou hřebíky umístěné blíže sebe?

a) na Martinově, b) na Jirkově, c) na obou stejně, d) nedá se určit.

Freudenthal (1978, 1983) spatřuje proporcionální uvažování v řešení tří typů úloh:

1) Porovnání dvou částí jednoho celku – např. poměr dívek a chlapců ve třídě.

2) Porovnání jedné veličiny vztažené na různá množství – např. v kontextech jako je míle na galon, počet lidí na čtvereční kilometr, kilogramy na metr krychlový nebo jednotková cena. Tato porovnání nejsou obecně pojmenovávána jako poměr, ale spíše cena, hustota apod.

3) Porovnání veličiny ve dvou hodnotách, které spolu souvisejí, ale nejsou součástí společného celku – např. poměr stran dvou trojúhelníků je 2:1. Tato porovnání jsou často vykládána jako změny měřítka a zahrnují otázky podobnosti – např. zvětši nebo zmenši v daném poměru.

Výzkumy opakovaně ukázaly, že relativně málo žáků dokáže dobře uplatňovat znalosti z oblasti úměry (Post, Behr a Lesh, 1988). Kritickým momentem při řešení úloh je multiplikativní vztah, který existuje mezi dvěma veličinami (Cramer, Post a Currier, 1993). Vývoj proporcionálního uvažování, které je považováno za významný cíl výuky matematiky na základních školách, vychází právě z pochopení multiplikativního porovnávání veličin (Behr, Harel, Post, Lesh, 1992). Dají se vypozorovat dva hlavní faktory způsobující selhávání žáků. První se týká rozsahu předchozích znalostí potřebných pro vytvoření konceptu úměry – násobení, dělení, zlomky a desetinná čísla (Behr, 1992; English, Halford, 1995). Důsledkem pak je nerozlišování mezi aditivními a multiplikativními vztahy. Druhý faktor souvisí se vznikem a budováním proporcionálního uvažování. To by mělo být vystavěno na základě mnoha reálných zkušeností, neformálních intuitivních úvah a vlastních řešitelských strategií, které až následně mohou být základem pro jejich formální popsání.

5.2.1 Žákovské strategie řešení úloh na úměry

Freudenthal (1978, 1983) také poukázal na to, že úlohy na „chybějící hodnoty“ a „porovnávání poměrů“ lze řešit pomocí tří různých přístupů:

1) Poměrem hodnot v rámci jedné veličiny.
2) Poměrem mezi dvěma veličinami.
3) Formálním vytvořením matematického vztahu podle známého algoritmu a následným výpočtem.

Uvedené přístupy lze dokumentovat na řešení úlohy typu „chybějící hodnoty“: *Vzdálenost dvou míst A a B na mapě je 3 cm. Jejich skutečná vzdálenost činí 2 kilometry. Vzdálenost dvou míst C a D na téže mapě je 4,5 cm. Jaká je skutečná vzdálenost míst C a D?*

1) $\frac{4,5}{3} = \frac{x}{2}$; 4,5 cm je 1,5 krát větší než 3 cm, tudíž i hledaná skutečná vzdálenost *x* musí být 1,5 krát větší než 2 km.

2) $\frac{2}{3} = \frac{x}{4,5}$; 2 km jsou 1,5 krát menší než 3 cm, tudíž i hledaná skutečná vzdálenost *x* musí být 1,5 krát menší než 4,5 cm.

3)

↑	3 cm	....	2 km	↑
	4,5 cm	....	*x* km	

x = 2 · 4,5 : 3 = 3 km

Cramer a Post (1993) identifikovali u žáků po výkladu tématu úměry následující strategie řešení:

1) strategie využívající jednotkové hodnoty,

2) strategie „factor-of-change" – „krát tolik", někdy bývá součástí tzv. výstavbové strategie (viz obr. 5.7 na straně 75)

3) strategie využívající zlomků,

4) strategie křížového součinu (křížové pravidlo).

Každou ze strategií ilustruji na následující úloze: *Standa a Marek jeli stejnou rychlostí. Standovi trvalo ujetí 4 km 20 minut. Jak dlouho trvalo Markovi ujetí 12 km?*

1) Jednotková strategie.

Jednotkovou strategii zde můžeme použít dvojím způsobem. Buď si v prvním kroku vypočítáme počet kilometrů připadajících na jednu minutu, nebo počet minut připadajících na jeden kilometr.

2) Strategie „Factor-of-change".

Řešitel uvažuje: „Trvá-li ujetí 4 kilometrů 20 minut a je-li druhá trasa třikrát delší, musí její ujetí také trvat třikrát delší dobu." Tato metoda je volena tehdy, pokud je snadno určitelné, kolikrát je jedna hodnota větší (menší) než druhá.

3) Zlomková strategie.

Řešitel pracuje s rychlostí jako se zlomkem, tj. rozšiřováním či krácením dochází k hledané hodnotě.

$$\frac{4\,.\,3}{20\,.\,3} = \frac{12}{60}$$

4) Křížové pravidlo.

Jedná se o velmi efektivní, ale mechanický algoritmus (bohužel autoři neuvádějí, jak na něj studenti přišli). Postup řešení je zachycen v tabulce 5.1.

$\frac{\text{20 minut}}{\text{4 km}}$	=	$\frac{\text{? minut}}{\text{12 km}}$
20 minut x 12 km	=	? minut x 4 km
$\frac{\text{20 minuts x 12 km}}{\text{4 km}}$	=	? minut
60	=	?

Tab. 5.1: Strategie křížového součinu.

Cramer a Post (1993) dále uvádějí, že jednotková strategie je nejintuitivnějším přístupem a také se v žákovských řešeních vyskytuje nejčastěji. Je postavená na reálných zkušenostech. Naopak algoritmus křížového součinu je nejméně přirozený – například součin 20 minut krát 12 kilometrů nemá reálný význam.

5.2.2 Proporcionální uvažování a strategie řešení úloh na amerických školách

V tomto oddíle podrobněji představím studii, kterou jsem se ve své práci inspiroval (Ben-Chaim, 1998). Jejím cílem bylo zjistit, a) jaký vliv na vytváření představ a vědomostí spojených s tématy poměr a úměra mají odlišné výukové metody a přístupy učitelů vycházející z odlišných kurikulárních východisek a b) jaké strategie řešení žáci používají.

Výzkumný vzorek byl tvořen skupinou amerických žáků vyučovaných podle reformních osnov matematiky vytvořených v rámci projektu Connected Mathematics Project (dále jen CMP) na Michigan State University. V rámci projektu bylo vytvořeno ucelené matematické kurikulum s materiály pro podporu učitelů. Důraz byl kladen na aplikace matematiky, na problémové situace, kontexty úloh, porozumění matematickým vztahům, zobecnění a diskusi. Referenční skupinou byli žáci, kteří byli učeni tradičními metodami a přístupy, v nichž je role učitele vzhledem k řízení učební činnosti výrazně dominantnější. Na rozdíl od reformních osnov byly tradiční školní osnovy zaměřené na rozvoj znalostí studentů a na vytváření dovedností v užívání nabízených početních algoritmů. Ty jsou procvičovány s ohledem na rychlost a přesnost při jejich užívání. Teprve až žáci zvládnou rutinní početní dovednosti, dochází k jejich aplikaci při řešení praktických problémů.

Prostředí pro žáky, kteří pracovali podle osnov CMP, bylo výrazně jiné než prostředí žáků v tradičním programu – týká se odlišné struktury učebnic, organizace učeben a výukových metod. Hlavním cílem studie bylo zjištění efektivity obou přístupů (CMP osnov a tradičních osnov) v následujících oblastech: pochopení pojmům, početní dovednosti, schopnosti řešit problémy. Autoři se ptali, zda nový CMP přístup vede žáky k úspěšnému vytvoření efektivních strategií při řešení problémů spojených s poměry a úměrnostmi.

Data pro tuto studii byla získána v průběhu školního roku 1994/1995 v sedmých ročnících amerických škol. Celkem 124 žáků bylo ve vzorku CMP a 91 žáků bylo v kontrolním vzorku. Oba vzorky byly vybrány na základě rovnocenných výsledků ve standardizovaných testech a následně testovány písemnou zkouškou na níže uvedených pěti úlohách. V návaznosti na písemnou zkoušku byly provedeny rozhovory asi u 25 % žáků každého vzorku.

První dvě úlohy byly postavené na výpočtu s jednotkovou cenou – jedna byla typem úlohy „číselného porovnání“ a druhá „chybějící hodnoty“.

Třetí a čtvrtá úloha se týkala vztahů mezi vzdáleností, časem a rychlostí. V obou případech se jednalo o „číselné porovnání“. Hlavní rozdíl mezi nimi byl ve stupni složitosti, kdy jedna úloha obsahovala pouze celá čísla a druhá zlomky a desetinná čísla.

Pátá úloha pracovala s hustotou obyvatelstva. Jednalo se o úlohu spojenou s číselným porovnáváním, ve které navíc vystupují větší celá čísla.

Všech pět úloh bylo odlišných od těch, které se objevují v amerických standardizovaných testech. Byly zasazeny do reálných kontextů, jako je nákup v obchodě, cestování na kolech či zmiňovaná hustota obyvatelstva. Zadání úloh následuje (Ben-Chaim, 1998, s. 255; vlastní překlad):

Výlet do ZOO.
Max, Eliza, Alex a Cosima plánují na závěr školního roku výlet na kole do zoologické zahrady. Žáci se sešli na školním parkovišti a jeli společně po cyklostezce do ZOO. Po prohlídce se zastavili na svačinu a koupili si nápoje na cestu zpět.

1. Max a Eliza vybírali ze dvou druhů nápojů.
Gatorade stojí 2 dolary za 16 uncí[1].
Brusinkovo-malinová šťáva stojí 1,60 dolarů za 12 uncí.
Nakonec koupili brusinkovo-malinovou šťávu. Byla to z hlediska ceny správná volba?
Uveď výpočty, které vedou ke správné odpovědi.

2. Cosima a Alex nakoupili müssli tyčinky a jablka.
Müssli tyčinky stojí 2,60 dolarů za 8 kusů a cena 6 jablek je 1,95 dolarů.
a) Kolik utratili za 20 müssli tyčinek? Vysvětlete svou úvahu.
b) Kolik utratili za 20 jablek? Opět vysvětlete svou úvahu.

3. Cosima a Alex si na zpáteční cestě chtěli porovnat své rychlosti.
Cosimě trvalo 5 mil ke svému domu 20 minut.
Alexovi trvalo 7 mil ke svému domu 25 min.
Kdo jel rychleji? Vysvětlete svou úvahu.

4. Následující sobotu Max a Eliza jeli opět kolem jezera do parku.
Cestou tam ujeli 30 mil a trvalo jim to 1,5 hodin. Zpáteční cestu si zkrátili na 20 mil. Cesta zpět jim trvala 3/4 hodiny. Jakou část své cesty jeli rychleji? Vysvětlete svou úvahu.

[1] Unce je jednotka objemu. 1 americká dutá unce = 29,6 ml.

5. V uličce nedaleko školy Max a Alex viděli několik divokých koček. Doma si zjistili, že v jejich městě Smithville žije asi 1 000 divokých koček a asi 1 500 divokých koček žije v sousedním městě Jonesville. Smithville má rozlohu 60 čtverečných mil, Jonesville 100 čtverečních mil.
V jakém z obou měst je pravděpodobnější spatření divoké kočky? Vysvětlete svou úvahu.

Odpovědi byly tříděny do kategorií: správná odpověď, nesprávná odpověď, bez uvedené odpovědi. Správné odpovědi byly děleny do podkategorií: pouze správná odpověď, správná odpověď s popisem řešení a správná odpověď s nesprávným popisem řešení. Nesprávné odpovědi byly také rozlišovány: pouze nesprávná odpověď, nesprávná odpověď s částečným pochopením a nesprávná úvaha. Tabulka 5.2 ukazuje souhrnné porovnání úspěšnosti CMP žáků oproti kontrolnímu vzorku v pěti zadaných úlohách ve výše uvedených kategoriích.

Výsledky žáků v testu proporcionálního uvažování							
	Správná odpověď			Nesprávná odpověď			Bez uvedené odpovědi
	pouze správná odpověď	se správným postupem práce	s nesprávným postupem práce	pouze nesprávná odpověď	s částečným pochopením	nesprávná úvaha	
CMP vzorek (124 žáků)	3	53	9	2	15	10	8
kontrolní vzorek (91 žáků)	6	28	21	4	10	23	8
Hodnoty v tabulce jsou uváděny v procentech.							

Tab. 5.2: (Ben-Chaim, 1998, s. 253)

Z tabulky 5.2 je vidět, že CMP žáci prokázali větší dovednosti v písemném zdůvodňování svých odpovědí, než tomu bylo u žáků kontrolního vzorku.

První úloha je zaměřená na „číselné porovnávání“, zatímco druhá vyžaduje „nalezení chybějící hodnoty“. V obou vzorcích žáků byla vyšší úspěšnost u „chybějící hodnoty“ než u „číselného porovnání“. Vysoké procento žáků CMP u „číselného porovnání“ používá strategii „jednotkové ceny“ (viz dále uváděné strategie řešení). CMP žáci mají u úloh 1 i 2 výrazně vyšší úspěšnost než žáci kontrolního vzorku.

Autoři analýzou žákovských prací a individuálními rozhovory s žáky dále zjišťovali používané strategie řešení. Provedli i rozhovory s učiteli.

- *Strategie řešení pro úlohy typu „číselné porovnávání“*

Bylo identifikováno devět různých strategií pro řešení úloh typu „číselného porovnávání“.

Strategie 1 – strategie „jednotkové míry, hodnoty“. Tato strategie byla často používána v obou vzorcích žáků a často se vyskytovala u správných řešení. Byla použita u 81 žáků CMP (65 %) ve srovnání s pouze 22 žáky kontrolního vzorku (24 %). Zdá se, že tato strategie se objevuje přirozeně u žáků, kteří si vytvářejí vlastní strategie řešení. Příklad řešení žáka z CMP skupiny „správné řešení se správným postupem“ je na obrázku 5.1.

$2.00 \div 16 = 12.5$ Gatorade – 12.5¢ unit price.
$1.60 \div 12 = 13.3$ Cranraspberry – 13.3¢ unit price.
No. They didn't make the best economical choice.

Obr. 5.1: (Ben-Chaim, 1998, s. 258)

Příklad CMP žákovského řešení „nesprávná odpověď – částečné porozumění“ je vidět na obrázku 5.2.

$2.00 \div 16 = 0.125$
$1.60 \div 12 = 0.133$
Yes, they made the best economical choice.

Obr. 5.2: (Ben-Chaim, 1998, s. 258)

Jedním z možných vysvětlení, které nabídnul vyučující žáka, jehož řešení je na obr. 5.2: „Občas se stává, že žáci považují za správný větší výsledek.“

Strategie 2 – Porovnání poměrů jednotlivých proměnných, tzv. „vnitřních poměrů“. Správná řešení, která se u žáků vyskytla, byla doprovázena zápisem uvedeným na obrázku 3.

$$\frac{16 ounces}{12 ounces} = 1.333\cdots = \frac{4}{3}$$
$$\frac{\$\,2.00}{\$\,1.60} = 1.250 = \frac{5}{4}$$

Obr. 5.3: (Ben-Chaim, 1998, s. 259)

Na obrázku 5.4 je příklad nesprávného řešení žáka kontrolního vzorku s využitím této strategie.

$16 \div \$\,12 = 1R4$
$200 \div 1.60 = 1R40$
Yes, they made the right choice.

Obr. 5.4: (Ben-Chaim, 1998, s. 259)

Tato odpověď byla klasifikována jako „nesprávná s částečným porozuměním". Žák používá uvedenou strategii, ale ze získaného výsledku vyvozuje nesprávný závěr. V zápise za písmenem R uvádí zbytek po dělení. Tuto strategii používalo málo žáků (v článku není uvedený konkrétní počet), nicméně její přítomnost ilustruje rozmanitost procesů myšlení, které žáci rozvíjejí.

Strategie 3 – Přepočítání ceny na stejná množství a jejich následné porovnání. Příklad CMP žákovské práce s využitím této strategie je na obrázku 5.5. Žák přepočítává cenu obou druhů šťáv na 16 uncí.

$$\frac{\$\,1.60}{3} = 0.533\cdots$$

$$\begin{array}{r} +\,0.53 \\ \hline 2.13 \end{array}$$

Gatorade – \$ 2.00 for 16 ounces.
Cranraspberry juice – \$ 2.13 for 16 ounces.
No. They didn't make the best choice.

Obr. 5.5: (Ben-Chaim, 1998, s. 260)

Strategie 4 – Porovnání množství za stejnou cenu. Například jeden žák zjistil, že může koupit za 8 dolarů 60 uncí malinové šťávy a 64 uncí Gatorade. Jiný žák přepočítává množství na 40 centů (viz obr. 5.6).

$$\$\,2.00 \div 5 = 40ć\text{, so } \frac{16}{5} = 3.2 \text{ ounces of Gatorade.}$$
$$\$\,1.60 \div 4 = 4 = 40ć\text{, so } \frac{12}{4} = 3 \text{ ounces of CRJ.}$$

Obr. 5.6: (Ben-Chaim, 1998, s. 260)

Strategie 5 – Výstavbová („Building up") strategie. Variantou této strategie je i práce s tabulkou. Řešení pomocí této strategie je vidět na obrázku 5.7.

Gatorade		Cranraspberry	
$	ounces	$	ounces
2.00	16	1.60	12
	32	3.20	24
6.00	48		36
		6.40	48

No, they didn't because at 48 ounces of juice, Gatorade costs \$ 6.00, and Cranraspberry juice costs \$ 6.40

Obr. 5.7: (Ben-Chaim, 1998, s. 260)

Odpověď žáka: „Ne, nevybrali cenově výhodnější šťávu, protože za 48 uncí šťávy Gatorade zaplatí 6,00 dolarů a za stejné množství šťávy Cranraspberry 6,40 dolarů."

Navzdory zjištění jiných studií (Hart, 1981; Tourniaire, 1986), že tato strategii je běžná u žáků tohoto věku, zde byla pozorována její malá četnost. Jinak tabulka jako schematizující nástroj je vhodný prostředek k objevování a uplatňování vlastností úměrností. Na druhou stranu přispívá i k vytrhávání úloh z kontextu.

Strategie 6 – Pohledem na rozdíl mezi stejnými proměnnými. Dvě práce ilustrující aritmeticky lákavý, ale chybný přístup k porovnávání je zachycena na obrázku 5.8.

$$\begin{array}{rr l|rr l}
2.00 & 16 & & 16 & 2.00 & \\
-\,1.60 & -\,12 & \text{No} & -\,12 & -\,1.60 & \\
\hline
0.40 & 4 & & 4 & 40¢ & \text{Yes}
\end{array}$$

Obr. 5.8: (Ben-Chaim, 1998, s. 261)

Mnoho dalších žáků z obou vzorků používá více či méně stejnou strategii. Podobně chybné (aditivní) uvažování autoři studie našli v odpovědích na jiné srovnávací úlohy. Například, když žáci znali informace o počtu chlapců a dívek ve dvou různých třídách a měli porovnat rozdělení pohlaví v jednotlivých třídách, často provedli srovnání jako určení rozdílu mezi počtem chlapců a dívek v těchto třídách.

Strategie 7 – Práce s číselnými hodnotami, ne však v kontextu daného problému. Na obrázku 5.9 je uveden příklad práce žáka kontrolního vzorku používajícího tuto chybnou strategii.

Yes.	$2.00 \times 12 = 24$ Gatorade
$1.60 \times 12 = 19.2$	$1.60 \times 16 = 25.60$ Cranraspberry
$2.00 \times 16 = 32$	juice.

Obr. 5.9: (Ben-Chaim, 1998, s. 261)

Jedná se v podstatě o formální použití křížového pravidla pro porovnávací typy úloh.

Strategie 8 – Strategie pracující pouze s jednou proměnnou ignoruje některá data, která jsou součástí problému. Je zřejmé, že toto je chybná strategie. Její jednoduchost je však pro žáky velmi atraktivní. To je ilustrováno na následujících příkladech prací žáků:

Ano, protože nápoj si koupíte o 40 centů levněji, takže ušetříte spoustu peněz. *(2 dolary — 1,6 dolarů = 0,40 dolarů)*	*Ne, protože Gatorade je levnější, prodává se ve větším množství - uncích.* *(16 uncí > 12 uncí)*

Strategie 9 – Afektivní reakce na číselný údaj a otázku. Byly identifikovány dva druhy odpovědí, kdy pozornost žáků není věnována množství a ceně, popřípadě srovnávací otázce. Například čtyři žáci uvedli tyto odpovědi:

Ano, rozhodli se správně, protože je to nestálo tolik peněz.	*Ano, bylo to správné, ušetřili 40 centů.*
Ne, Gatorade chutná lépe.	*Ne, protože některé děti nemají rádi šťávu brusinkovo-malinovou šťávu.*

Tyto typy odpovědí mohou být správné v případě, že byly podpořeny správnou úvahou. Příkladem uznané odpovědi může být: „Ano, vybrali si cenově výhodnější variantu. Přestože je Gatorade levnější, oni však potřebují právě 12 uncí a nadbytečné 4 unce by nespotřebovali."

Podrobná analýza žákovských odpovědí dokládá, že žáci přicházejí s řadou správných, ale i nesprávných řešitelských strategií. CMP žáci byli obecně úspěšnější v uplatňování efektivní strategie pro zadané úlohy. Nejúčinnějším přístupem k řešení úloh se srovnáváním cen je pravděpodobně strategie „jednotkové hodnoty" a CMP žáci použili tuto strategie mnohem častěji. Behr a Lesh (1988) považují metodu „jednotkové hodnoty" za nejvíce intuitivní. Výstavba proporcionálního myšlení prostřednictvím objevování a porovnávání různých strategií řešení může pomoci při nalezení právě té nejefektivnější.

- *Strategie řešení pro úlohy typu „chybějící hodnota"*

Analýza odpovědí žáků u úlohy typu „chybějící hodnota" (chybějící hodnota v poměru porovnávajícím množství a cenu müssli tyčinek a jablek) také ukázala používání různých strategií. Nejčastějšími strategiemi byly opět strategie „jednotkových" či „jednotných cen". 102 ze 124 CMP žáků (82 %) používá právě tyto strategie nebo jejich kombinace. Tyto efektivní strategie byly používány pouze u 56 z 91 žáků kontrolního vzorku (62 %). Následující příklady ilustrují řešení této úlohy u vybraných žáků.

a) 20 tyčinek. 8 tyčinek = 2,5 × 2,60 dolarů = 6,50 dolarů za 20 tyčinek, protože 8 tyčinek se vejde do dvaceti 2,5 krát. Takže bude to stát 2,5 krát více peněz. Násobí se tedy 2,5 × 2,60 dolarů a to se rovná 6,50 dolarů za 20 tyčinek.

b) 20 jablek. 6 jablek = 3,33 × 1,95 dolarů = 6,50 dolarů za 20 jablek, protože když se rozdělí 20 : 6 pak se zjistí, že 6 se vejde do dvaceti 3,33 krát. To znamená, že cena bude 3,33 krát větší. Takže jsme násobili 3,33 × 1,95 dolarů a to se rovná 6,50 dolarů.

c) By to stálo 6,50 dolarů za 20 tyčinek. 8 tyčinek stojí 2,60. 16 tyčinek stojí 5,20 dolarů. 4 tyčinky stojí 1,30 dolarů. 20 tyčinek stojí 6,50.

d) Stálo by to 6,50 dolarů za 20 jablek. 6 jablek stálo 1,95 dolarů. 12 jablek stálo 3,90 dolarů. 18 jablek stálo 5,85 dolarů. 2 jablka stála 65 centů. 20 jablek stálo 6,50.

Cramer a Post (1993) nazývá tento postup „factor-of-change", zatímco Hart (1981) jej pojmenovává jako „výstavbová strategie". Další řešení je příkladem „jednotkové strategie" (Ben-Chaim, 1998, s. 265, vlastní překlad):

a) 6,50 dolarů. Z ceny 2,60 dolarů za 8 tyčinek jsem vypočítal, kolik stojí jedna müssli tyčinka: 2,60 : 8 = 0,325 = 32,5 centů. Cenu jedné tyčinky jsem vynásobil jejich počtem: 0,325 · 20 a dostal tak výslednou cenu 6,50 dolarů.

b) 6,50 dolarů. Vypočítal jsem, kolik stálo jedno jablko: 1,95 : 6 a vynásobením dvaceti získal cenu 20 jablek: 1,95 : 6 · 20 = 6,50.

- *Strategie řešení pro úlohy typu „číselné porovnávání“*

Úlohy 3 a 4 jsou typově na "číselné porovnávání". Úkolem je porovnání rychlostí na základě známých vzdáleností a časů. Úspěšnost byla v obou vzorcích žáků nižší u úlohy 4, která je objektivně obtížnější vzhledem k přítomnosti zlomků a desetinných čísel. Většina nesprávných odpovědí žáků obou vzorků pramenila ze záměny vzdálenosti za jednotku času a času na jednotku vzdálenosti. V úloze 3 řada žáků počítala, kolik minut připadne na jednu míli. Další chyby se dopouštěli, když uvedli jednotku rychlosti mil za hodinu místo správné jednotky mil za minutu. Obě předchozí odpovědi byly označeny za „nesprávné s částečným porozuměním“.

Příkladem „správné odpovědi“ je následující řešení:

Cozi: 20 minut : 5 mil = 4 minuty na jednu míli.

Alex: 25 minut : 7 mil = 3,57 minut na jednu míli.

Alex jel rychleji, protože jel jednu míli o 0,43 minut rychleji.

Musel jet delší cestou, ale trvalo mu to méně času na jednu míli.

Příkladem „nesprávné odpovědi s částečným porozuměním“ je toto řešení:

Cozi jela rychleji.

Vydělil jsem 20 pěti a dostal 4 míle za minutu pro Cozi.

Pak jsem rozdělil 25 sedmi a dostal 3.5 míle za minutu.

Cozi 20 : 5 = 4 mil/h

Alex 25 : 7 = 3,5 mil/h

Cozi jede rychleji.

V zadaných úlohách bylo záměrně použito větší číslo pro časový údaj oproti menšímu číslu u vzdálenosti. Autoři studie tak chtěli eliminovat taková správná řešení, která by nebyla opřená o pochopení. Učitelé potvrdili, že někteří žáci dávají přednost dělení většího čísla číslem menším, aniž by to mělo logické opodstatnění.

Analýza strategií používaných při řešení těchto úloh ukázala, že CMP žáci používají „jednotkovou hodnotu“ dvakrát tak často než žáci kontrolního vzorku (54 % oproti 27 %). Podle autorů studie to může být opět důsledkem jiného přístupu k řešení problémů, kdy CMP žáci budují vlastní chápání matematických struktur často v diskusi s ostatními žáky oproti procvičování hotových formálních algoritmů podle tradičních osnov.

Význam vyžadování argumentace svých odpovědí a nespokojení se pouze s výsledkem je vidět na „správných odpovědích s nesprávným postupem“, a to zejména u kontrolní skupiny. Například v úloze 4 více než 40 % žáků z kontrolní skupiny odpovídalo správně, že Max a Eliza jeli rychleji při jejich zpáteční cestě, ale jejich zdůvodnění bylo nesprávné. Následující řešení kontrolního vzorku žáků jsou ilustrací popsaného problému.

Rychlejší byli na zpáteční cestě, protože ta jim trvala 45 min.	*60 : 4 = 15 · 3 = 45 min.* *Po obědě byli rychlejší, protože 3/4 hodiny se rovná 45 minutám.*

Na druhé straně bylo získáno mnoho zajímavých řešení úlohy 4 od CMP žáků:

30 : 1,5 = 20 mil za hodinu pro *cestu tam.* *20 : 0,75 = 26,6 mil za hodinu.* *Rychleji jeli cestou zpět 26.6 mil za hodinu* *než 20 kilometrů za hodinu.*	*Druhou část cesty jeli rychleji, protože to trvalo jen 2,25 minut na jednu míli* *a cestou tam jim to trvalo 3,00 na jednu míli.*
Rychleji jeli při zpáteční cestě. *Cesta tam 30 : 90 minutami = 0,3 jednotek rychlosti,* *zpáteční cesta 20 : 45 minutami = 0,4 jednotek rychlosti*	*Na zpáteční cestě, protože tam jim trvalo pouze 3/4 hodiny ujetí 20 mil. Při cestě tam jim trvalo celou hodinu ujetí 20 mil.* *Tam:* *30 mil* *1,5 h* *To je 20 mil za hodinu.*
1,5 h : 2 = 3/4 hodiny *30 : 2 = 15 mil* *Budou rychlejší na cestě domů,* *protože 15 mil ujeli za 3/4 hodiny cestou tam* *a 20 mil za 3/4 hodiny cestou zpět.*	*30 : 90 = 0,33 (1,5 h = 90 min)* *20 : 45 = 0,44* *Jeli rychleji na cestě zpět.* *44 mil/h - cesta zpět* *33 mil/h - cesta tam*

Poslední úloha 5 pracuje s hustotou počtu divokých koček ve dvou městech. S výjimkou odlišného kontextu je řešený problém podobný jako v úloze 3. I tady se jedná o „číselné porovnávání“. Zde jsou však použita větší přirozená čísla. Míra úspěšnosti u CMP žáků byla 37 %, zatímco u kontrolního vzorku žáků to bylo 23 %. 25 % CMP žáků a 33 % kontrolního vzorku žáků uvedlo správnou odpověď (avšak s nesprávným komentářem) u otázky „kde je pravděpodobnější spatření divoké kočky“. Přes podobnost úloh 3 a 5 zde žáci potřebovali v průměru více času na její řešení. Jednou z možných příčin této časové diference může být častější setkávání se s kontextem úloh spojených se vzdáleností, rychlostí, časem, automobily než s počty obyvatel, rozlohou či hustotou. Sekundární příčinou může být výskyt větších čísel v zadání. Oba tyto faktory byly již dříve popsány jako faktory ovlivňující výkon žáků této věkové skupiny (Tourniaire, Pulos, 1985; Cramer, Post 1993).

- *Závěry studie*

Hlavním cílem této studie bylo porovnat proporcionální uvažování a argumentaci u žáků sedmého ročníku se dvěma zcela odlišnými typy kurikulární zkušenosti – reformní CMP výuka a tradiční vzdělávací program. Výsledky studie jsou povzbudivé pro obhájce reformního kurikula a pedagogiky. CMP žáci byli jednoznačně úspěšnější než žáci kontrolního vzorku, a to v každé jednotlivé úloze 1 až 5. Výsledky také ukazují, že žáci CMP byli schopni poskytovat kvalitnější písemné a ústní vysvětlení svého řešení.

I když CMP žáci nebyli seznamováni se standardními postupy řešení, ve srovnání s tradičně vzdělávanými žáky obstáli a prokázali schopnost rozvíjet různé strategie řešení včetně těch nejefektivnějších. Závěry této studie naznačují sílu, efektivitu a intuitivní blízkost strategie „jednotkové hodnoty". Studie dále potvrdila vliv různých číselných reprezentací (celá čísla, zlomky, desetinná čísla, víceciferná celá čísla), kontextu úloh a strukturální obtížnosti na úspěšnost při řešení. Studie nachází oporu ve svých závěrech v řadě dalších prací. Např. Freudenthal (1983) doporučuje proces učení poměru a úměrnostem řídit takovým způsobem, aby momenty vhledu nebyly blokovány procesy algoritmizace a automatizace. Streefland (1984) uvádí, že učení se poměrům a úměrnostem se děje často na základě vlastních vizuálních modelů a schémat žáků, proto je nezbytné pracovat na rozvoji proporcionálního myšlení na různých úrovních a u různých věkových kategorií žáků.

6. Žákovské strategie řešení úloh – vlastní výzkum

V návaznosti na rozbor předchozí studie (Ben-Chaim, 1998) jsem se rozhodl pomocí podobně sestavených úloh (rozsah, kontext, obtížnost, typ úloh – číselné/nečíselné porovnávání, neznámá hodnota) analyzovat řešitelské strategie žáků, tentokrát u úloh na nepřímou úměrnost. Úlohy jsem nabídl sedmi žákům naší školy a pro zajímavost i jednomu absolventovi (student JI12), který momentálně studuje ve třetím ročníku SŠ. Mým záměrem bylo zjistit, zda i žáci, kteří ještě nebyli vyučováni nepřímé úměrnosti, dokážou úlohy řešit. Proto jsem vybral trojici žáků z 5. ročníku (VZ5, MZ5, DN5). Druhé dvojici (žáci 7. ročníku VB7, JU7) jsem úlohy předložil na závěr výkladu přímé a nepřímé úměrnosti. Třetí dvojice (žákyně 9. ročníku MW9, VJ9) řešila sadu úloh s delším časovým odstupem od probíraného tématu.

V sedmém ročníku vyučuji matematiku. Při výuce přímé a nepřímé úměrnosti jsem dával nejvíce prostoru strategii „přes jednotkovou hodnotu“ (osobně ji považuji za nejintuitivnější) a práci s tabulkou (považuji ji za vhodnou při zkoumání vlastností obou úměrností a při práci s více hodnotami). Naopak jsem při výkladu vynechal strategii řešení trojčlenkou. V této fázi ji považuji za ryze formální postup, žáci v této době ještě neumějí řešit rovnice se zlomky (v tomto případě úměru $\frac{a}{b} = \frac{x}{d}$ pomocí ekvivalentních úprav rovnic). V současném 7. ročníku jsou nicméně dva žáci, kteří tento postup používají. Přinesli si jej z doučování. Na mé výhrady k trojčlence jsem je i jejich rodiče upozornil, tento postup jim však nezakazuji. Žákyně 9. ročníku a středoškolského studenta jsem v minulosti též učil. Žáky 5. ročníku jsem upřednostnil před žáky 6. ročníku na základě konzultace s jejich učitelkou matematiky. Ta se obávala, že by řešení sestavených úloh bylo nad jejich síly.

S výjimkou žáků 5. ročníku jsem do každé dvojice zařadil vždy jednoho žáka, u něhož jsem zaznamenal v minulosti častější výskyt vlastních, osobitých způsobů řešení (žáci JU7, VJ9), a jednoho žáka, který preferuje předkládané, hotové strategie řešení (žáci VB7, MW9).

Kontext úloh jsem volil z prostředí naší školy. V textu vystupují jména konkrétních žáků, s nimiž byly úlohy testovány. Na škole funguje školní parlament, jehož členové se na organizování školních akcí skutečně podílejí. I cykloturistické výlety mají u nás dlouhodobou tradici.

Zadání sady úloh:

Výlet do ZOO.

Jáchym, Veronika, Ondra a Richard plánují na Den dětí zorganizovat výlet na kole do zoologické zahrady. Před výletem řeší některé otázky důležité pro zdárný průběh celé akce. U všech úloh uveď výpočty, které vedou ke správné odpovědi.

1. Výletu se zúčastní jak starší žáci druhého, tak mladší žáci prvního stupně. Pan ředitel organizátorům přislíbil určité množství peněz, z kterých mají koupit občerstvení pro zúčastněné cyklisty – menší svačinku pro prvostupňové děti a větší pro druhostupňové. Organizátoři vědí, že na sbalení všech svačinek budou mít před odjezdem málo času, tak se rozhodli, že si předem vyzkouší, jak dlouho jim příprava svačin bude trvat.
Zjistili, že rychlost balení svačin je 3 velké svačiny/min. a 5 malých svačin/min. Jakých svačin budou mít více, jestliže balení velkých svačin jim bude trvat 200 sekund a balení malých svačin 258 sekund?
Typ úlohy „Porovnávání nenumerické“: Odpověď lze vyslovit bez vlastního výpočtu, balení menších svačin je rychlejší a zároveň je na něj vyčleněno i více času.
Obtížnost: Při numerickém řešení je nutné uvažovat s přepočtem na jinou jednotku času. Při řešení se může objevit práce se zlomky.

2. Paní učitelka poprosila Jáchyma, jestli by nesepsal a následně pro všechny učitele nepřepsal podstatné informace k výletu. Jáchymovi přepsání všech informací pro učitele zabralo 16 minut a 20 sekund. Když už měl vše hotové, tak jej napadlo, že mohl požádat Veroniku, Ondru a Richarda, aby mu s přepisováním pomohli. Kolik času si mohl Jáchym ušetřit, kdyby nápad dostal dřív? Předpokládejme, že všechny čtyři děti by přepisovaly text stejnou rychlostí.
Typ úlohy „Neznámá hodnota“: Ze tří zadaných hodnot mají žáci vypočítat čtvrtou.
Obtížnost: Jedna z veličin není číselně zadána, je nutné ji vyčíst z kontextu úlohy.

3. Richard dostal za úkol si trasu výletu předem projet. Cestu tam urazil za 50 minut a z tachometru vyčetl průměrnou rychlost 15 km/h. Při zpáteční cestě stejnou trasou se již cítil poněkud unavený a tak mu tachometr ukázal průměrnou rychlost zpáteční cesty 12 km/h. Richard je zvyklý si po každém výletě tachometr vynulovat. To udělal i tentokrát, tím ale ztratil v tachometru uloženou informaci o čase zpáteční cesty. Aby Ríša nemusel absolvovat celou cestu ještě jednou, pomozte mu chybějící čas vypočítat.
Typ úlohy „Neznámá hodnota“: Ze tří zadaných hodnot mají žáci vypočítat čtvrtou.
Obtížnost: Předpokládá se nižší obtížnost vzhledem ke kontextu rychlosti a času. Výpočty s nimi spojené mají žáci sedmého ročníku zažité z fyziky. Obtížnější může být práce se zadaným časem v minutách.

4. Ríša dodatečně uvažoval, že mezi cyklisty budou někteří rychlejší, ale najdou se jistě i pomalejší než je on sám. Pomozte Ríšovi vypočítat, jak dlouho by cyklistům trvala cesta tam, pokud by jeli rychlostmi 10 km/h, 12 km/h, 20 km/h?
Typ úlohy „Neznámá hodnota“: Ze tří zadaných hodnot mají žáci vypočítat čtvrtou.

Obtížnost: Postup nalezení čtvrté neznámé hodnoty je nutné provést opakovaně. Při řešení se může objevit práce se zlomky.

5. Veronika s Ondrou zatím vyhledávali některé zajímavosti o pražské ZOO. Veronika například zjistila, že v pražské ZOO mají 4 804 zvířat. Ondra si vzpomněl, že byl o letních prázdninách v ZOO v řeckých Athénách, a vytahoval se, že tam bylo zvířat dvakrát tolik. Veronika, která byla také na dovolené v Řecku, na to: „Leda tak potkanů." Oběma to nedalo a zjistili si v encyklopedii:

V Athénách žije 110 potkanů na [redacted] obyvatel a v Praze 210 potkanů na [redacted] obyvatel.

Bohužel v encyklopedii nebyla začerněná čísla čitelná. Mohli jen předpokládat, že oba údaje o počtu potkanů jsou vztaženy ke stejnému počtu obyvatel.

Dále si zjistili, že počty obyvatel v obou městech jsou – v Athénách 3 758 500 a v Praze 1 272 750.

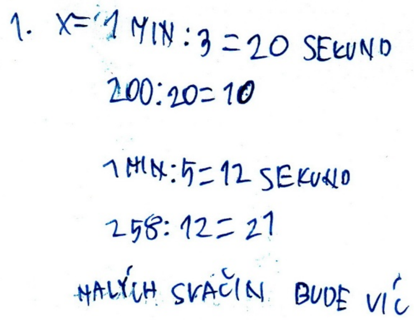
Dá se pouze z nalezených údajů určit, v jakém z měst žije větší počet potkanů?

Typ úlohy „Porovnání numerické/nenumerické": Otázka je formulována tak, že správná odpověď může být uznána i bez vlastního výpočtu.

Obtížnost: Vynecháním počtu obyvatel, na který je vztažená hustota výskytu potkanů, se brání postupu řešení přes konkrétní počet potkanů v daném městě. V úloze vystupují víceciferná přirozená čísla.

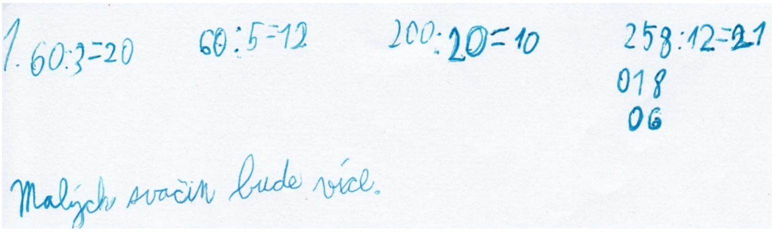
Úlohy jsem všem žákům zadal já. Žáci neměli stanovený časový limit na vypracování celého souboru úloh. Všechny žákovské práce byly vypracovány během jedné vyučovací hodiny, tj. odevzdány do 45 minut. Na řešení pracovali samostatně. V následujícím týdnu jsem se všemi žáky provedl rozhovor. V něm jsem si chtěl upřesnit či potvrdit mé závěry vyplývající z analýzy řešení a odpovědí žáků.

6.1 Strategie řešení pro úlohu 1



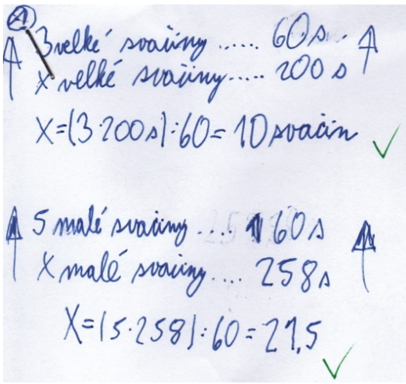
Obr. 6.1: Řešení první úlohy žákem 5. ročníku (VZ5).

Žák si nejprve vypočítal, kolik času bude trvat sbalení jedné svačiny. V dalším kroku celkový čas vydělil časem sbalení jedné svačiny, čímž dostal počet sbalených svačin. Postup opakoval pro velké i malé svačiny. Oba počty porovnal a zapsal správnou odpověď. Podobný postup ve svém řešení použil i žák DN5.



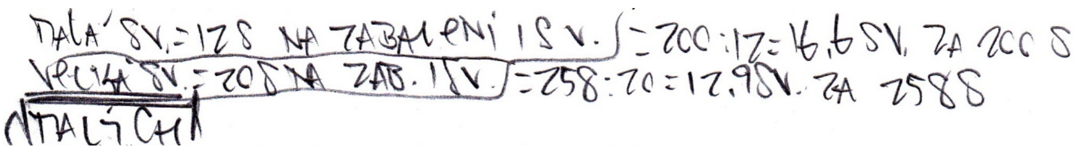
Obr. 6.2: Řešení první úlohy žákem 5. ročníku (MZ5).

Řešení je obdobné jako u předchozího žáka. Je zde navíc i nedokončený výpočet (258 : 12). Žák mi následně potvrdil, že podíl nedopočítával, protože mu dosažená fáze výpočtu již dovolila vyslovit odpověď na otázku.



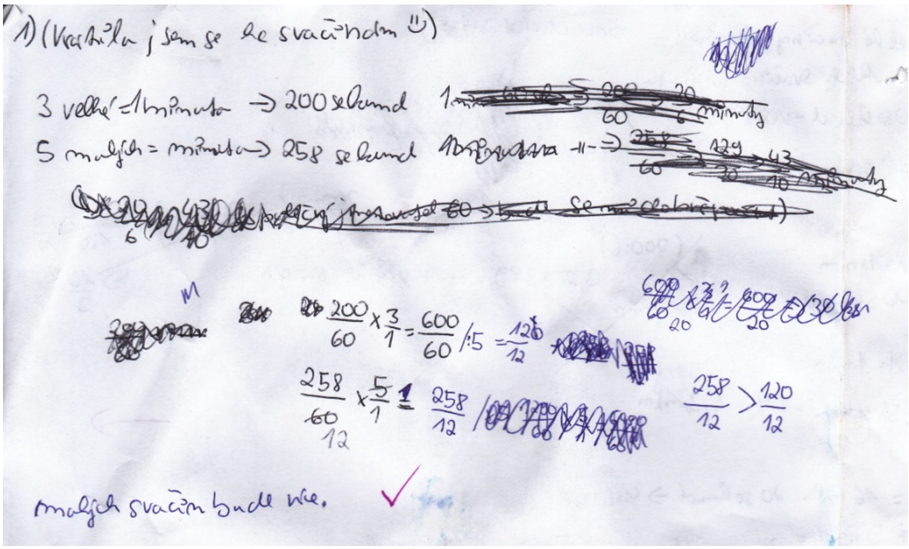
Obr. 6.3: Řešení první úlohy žákem 7. ročníku (VB7).

Přestože úloha byla zařazená typově jako úloha na nepřímou úměrnost – závislost rychlosti balení svačin na čase, žák ji pojímá jako úlohu na přímou úměrnost – závislost množství svačin na čase. K řešení používá trojčlenku. Odpověď na otázku uvedl až při následném rozhovoru.



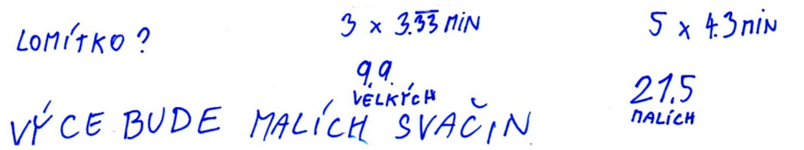
Obr. 6.4: Řešení první úlohy žákem 7. ročníku (JU7).

Žák si v prvním kroku vypočítá dobu potřebnou na sbalení jedné svačiny. Následně určí, kolikrát se tato doba vejde do zadaného času, což odpovídá počtu sbalených svačin. Žák se při výpočtu dopustil chyby z nepozornosti, dělil celkový čas balení velkých (malých) svačin časem potřebným na sbalení jedné malé (velké) svačiny. Správnou odpověď žák uvedl až v následném rozhovoru.



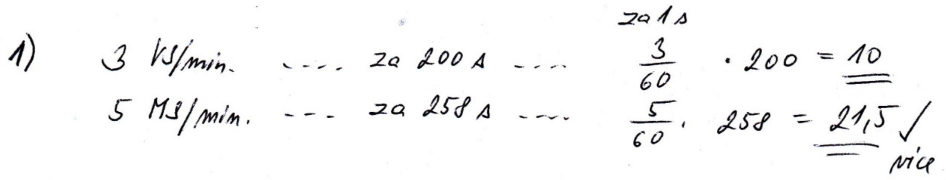
Obr. 6.5: Řešení první úlohy žákyní 9. ročníku (MW9).

Z rozhovoru s žákyní vyplynulo, že nejdříve převedla 200 sekund na minuty, tento údaj v minutách následně vynásobila třemi a získala počet velkých svačin sbalených za 200 sekund. Podobně postupovala při zjišťování počtu malých svačin. Za pozornost stojí, že až do výsledného porovnání počtu velkých a malých svačin pracovala s vyjádřením pomocí zlomků.



Obr. 6.6: Řešení první úlohy žákyní 9. ročníku (VJ9).

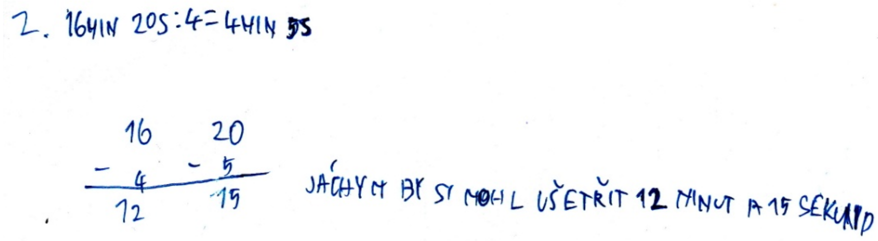
Zde žákyně použila stejnou strategii jako MW, jen s tím rozdílem, že nepracuje se zlomky, ale s desetinnými čísly. Výsledek přepočtu 200 sekund na minuty je zapsaný správně. Následným vynásobením třemi již však dostává nepřesný výsledek 9,9 velkých svačin. Odpověď na otázku je nicméně správná a vychází ze správné úvahy. Při řešení žákyně měla problém s interpretací zápisu *3 velké svačiny/min* (viz otazník na obrázku 6.6). Poté, co jsem jí zápis přečetl jako „tři velké svačiny za minutu“, úlohu již vyřešila.



Obr. 6.7: Řešení první úlohy studentem 3. ročníku SŠ (JI12).

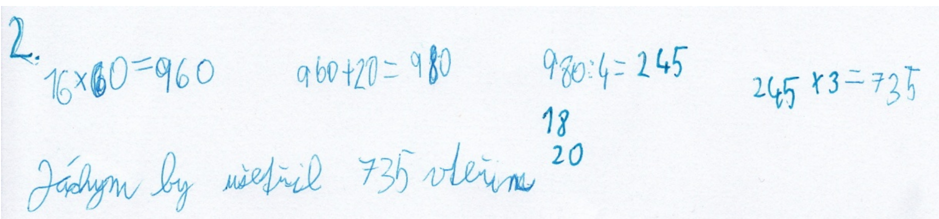
Student si nejprve určil počet svačin sbalených za jednu sekundu a následným vynásobením zadaným počtem sekund získal celkový počet svačin.

6.2 Strategie řešení pro úlohu 2



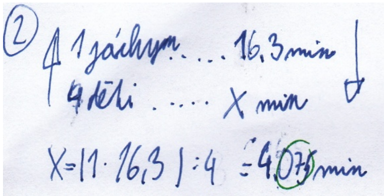
Obr. 6.8: Řešení druhé úlohy žákem 5. ročníku (VZ5).

Žák správně uvažuje, že hledaný čas musí být čtyřikrát kratší. Nepřevádí časový údaj na jednu jednotku, ale dělí čtyřmi zvlášť minuty a zvlášť sekundy. Následně odečítá původní a zkrácený čas a dostává odpověď na otázku: „Kolik času si Jáchym mohl ušetřit?“. Podobný postup ve svém řešení použil i žák DN5.



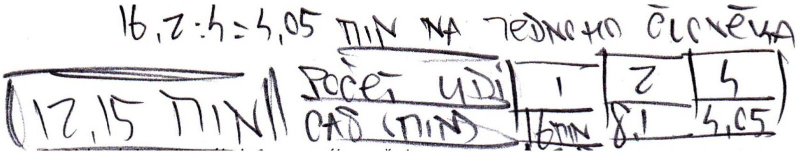
Obr. 6.9: Řešení druhé úlohy žákem 5. ročníku (MZ5).

Žák převádí časový údaj zadaný v minutách a sekundách na sekundy. Následně při přepočtu na 4 osoby jej správně dělí čtyřmi. Nyní porovnáním původního (1 žák) a většího (4 žáci) počtu osob si uvědomil, že si ušetří třikrát více času. K výsledku tedy nedochází odčítáním, ale násobením třemi.



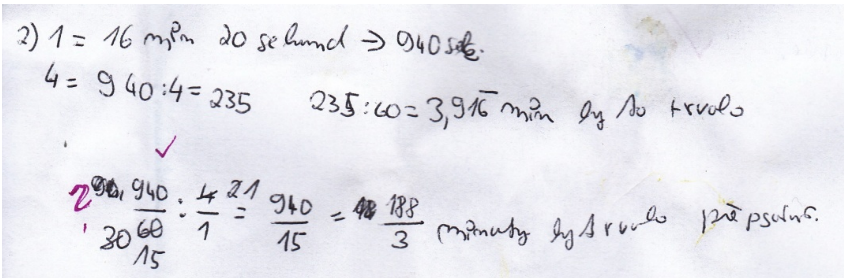
Obr. 6.10: Řešení druhé úlohy žákem 7. ročníku (VB7).

Žák úlohu řeší opět pomocí trojčlenky. Uvědomuje si, že se jedná o nepřímou úměrnost. V úloze se objevila nepřesnost při vyjadřování zadaného času v minutách (16 minut a 20 sekund = = 16,3 minut). Žák si správně uvědomil, že 20 sekund je třetina minuty, tuto třetinu však nesprávně zapisuje jako 0,3. V zápise chybí odpověď, kterou zformuloval až při ústním rozhovoru.



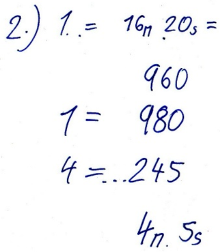
Obr. 6.11: Řešení druhé úlohy žákem 7. ročníku (JU7).

Žák správně řeší úlohu úvahou – kolikrát více lidí, tolikrát kratší čas. Dopouští se chyby ve vyjádření času – 16 minut 20 sekund zapisuje jako 16,2 minut.



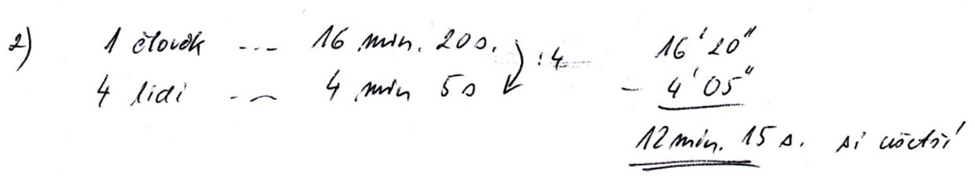
Obr. 6.12: Řešení druhé úlohy žákyní 9. ročníku (MW9).

Žákyně správně uvažuje, že když na přepisování textu bude čtyřikrát více osob, že přepíší text za čtyřikrát kratší dobu. Nicméně výsledek vyjádří v sekundách a při pokusu o jeho vyjádření v minutách se dopustí chyby – nesprávně krátí při dělení dvou zlomků. Zajímavé je, že již dílčí výsledek 235 sekund mohla žákyně považovat za správný výsledek, přesto jej převedla na minuty a vzhledem k tomu, že při posledním převodu získala nepřesné desetinné číslo, pokusila se jej přesně vyjádřit zlomkem. V řešení se objevila ještě jedna chyba – na začátku, místo aby k 16 minutám 20 sekund přičetla, tak je odečítá. Navíc chybí odpověď na otázku: „Kolik času si Jáchym mohl ušetřit?“



Obr. 6.13: Řešení druhé úlohy žákyní 9. ročníku (VJ9).

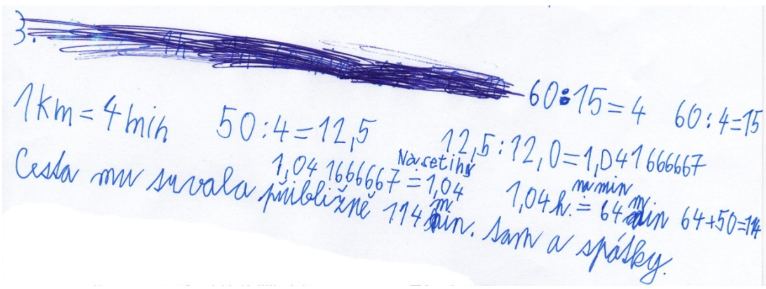
Řešení vychází ze správné úvahy – kolikrát více osob, tolikrát kratší čas. Čas zadaný v minutách a sekundách převede na jednu jednotku – sekundy, přepočítá na 4 osoby a následně vyjádří v celých minutách a v celých sekundách. Chybí zde odpověď na otázku: „Kolik času si Jáchym mohl ušetřit?“, tu uvedla až v rozhovoru.



Obr. 6.14: Řešení druhé úlohy studentem 3. ročníku SŠ (JI12).

Ze zápisu je zřejmý postup výpočtu – čtyřikrát kratší čas u čtyř lidí než u jednoho člověka, odečtení času jednoho člověka a času čtyř lidí.

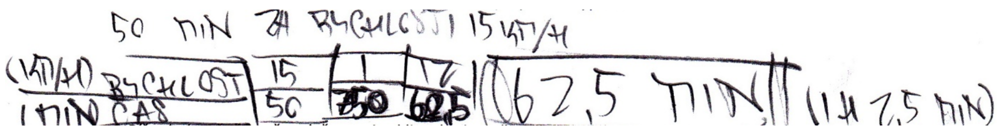
6.3 Strategie řešení pro úlohu 3



Obr. 6.15: Řešení třetí úlohy žákem 5. ročníku (DN5).

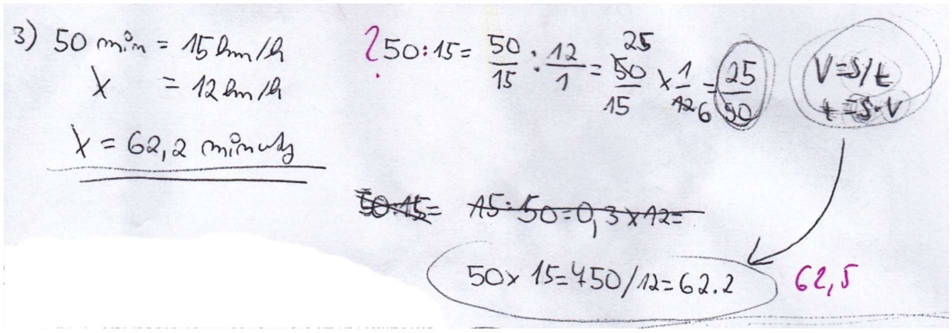
Ze zápisu je zřejmé, že žák nejdříve počítá, kolik minut bude trvat ujetí jednoho kilometru $(60 : 15 = 4)$. Následně určí počet kilometrů, které ujede za 50 minut $(50 : 4 = 12{,}5)$. Úvahou, kolikrát je 12,5 větší než 12, tolikrát bude výsledný čas větší než 1 hodina, získává dobu jízdy

$(12{,}5 : 12{,}0 = 1{,}041666667)$ v hodinách. V dalším kroku při převádění času v hodinách na vyjádření v hodinách a v minutách se dopouští chyby; 1,04 hodiny považuje za 64 minut. Zbývající žáci 5. ročníku (VZ5, MZ5) úlohu 3 řešili chybnou úvahou, kterou nedokázali zdůvodnit.



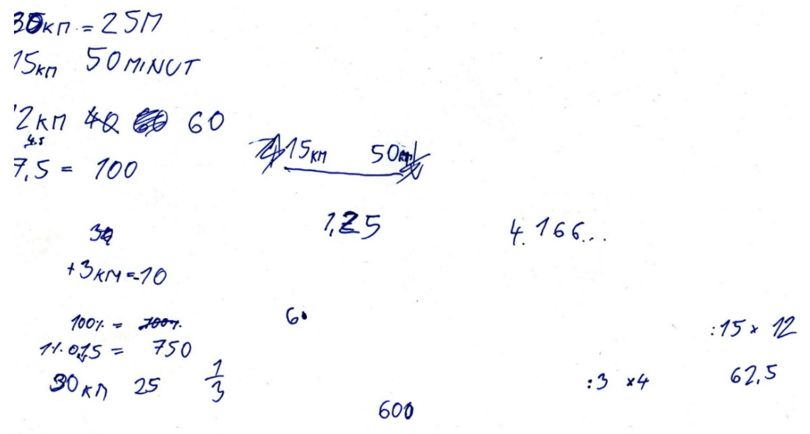
Obr. 6.16: Řešení třetí úlohy žákem 7. ročníku (JU7).

Žák řeší úlohu přes jednotkovou hodnotu rychlosti. Používá zápis hodnot do tabulky. Hodnoty času určuje úvahou – kolikrát je menší rychlost, tolikrát bude delší čas. Jedná se o správné řešení. Žák 7. ročníku VB7 řešil úlohu 3 správně použitou trojčlenkou.



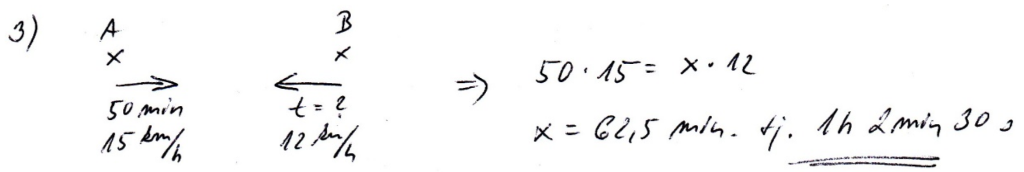
Obr. 6.17: Řešení třetí úlohy žákyní 9. ročníku (MW9).

Žákyně mi v následném rozhovoru potvrdila, že se nejprve pokoušela o řešení přes poměr (na obrázku 6.17 označeno otazníkem). Pamatovala si, že se to kdysi takhle nějak učili. Poté sáhla po řešení přes vztah mezi rychlostí, dráhou a časem, tak jak jej zná z fyziky. Nejprve vypočítala dráhu (50 krát 15), vydělením této dráhy rychlostí (12 km/h) získala výsledek. U výsledku se sice dopustila numerické chyby, ale předchozí zápis je správný. Dodatečně jsem se zeptal, v jakých jednotkách jí vyšel mezivýsledek dráhy (čas dosazuje v minutách a rychlost v km/h). Na to nebyla schopná odpovědět.



Obr. 6.18: Řešení třetí úlohy žákyní 9. ročníku (VJ9).

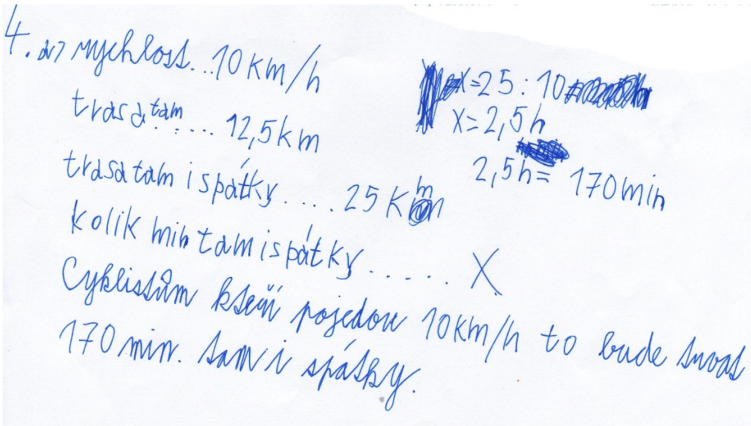
Zapsané řešení je na první pohled značně nepřehledné. V následném rozhovoru žákyně popsala, že se pokoušela o řešení úlohy trojčlenkou, kde si však nemohla vybavit, jak zadaná čísla dosadit do poměru. Protože si nebyla jistá, zkusila řešit úlohu dokonce přes procenta. V zápisu je většina prostoru věnována strategiím, které nakonec zavrhla. Přesto je zde uveden správný výsledek 62,5, ale bez jakéhokoliv náznaku postupu. V rozhovoru mi nabídla jako vysvětlení postup výpočtu 50·15:12 zdůvodněný přes mezivýsledek dráhy po výsledný čas v minutách. Opět jsem se ptal na jednotku dráhy. Žákyně obhájila svůj postup: „Když počítám na začátku s minutami, tak mě nemusí zajímat jednotka dráhy, výsledek opět vyjde v minutách.“



Obr. 6.19: Řešení třetí úlohy studentem 3. ročníku SŠ (JI12).

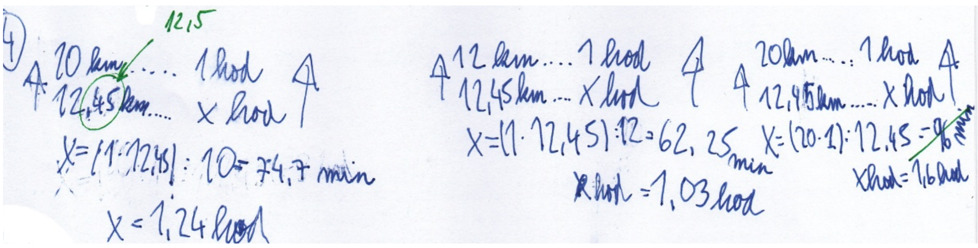
Student při rozhovoru potvrdil, že uvedenou rovnici sestavil na základě rovnosti dráhy cesty tam a dráhy zpáteční cesty. Minuty v zadaném čase nepřeváděl. Uvědomoval si, že poměr časů ať jsou v jakékoliv jednotce, zůstává stejný. Neboli pokud ponechá zadaný čas v minutách, hledaný čas vyjde opět v minutách.

6.4 Strategie řešení pro úlohu 4



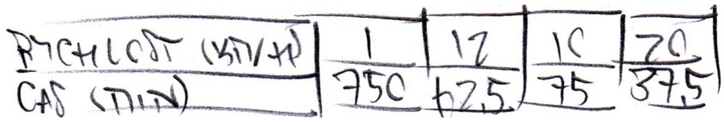
Obr. 6.20: Řešení čtvrté úlohy žákem 5. ročníku (DN5).

Žák v řešení pracuje s údajem dráhy, kterou vypočítal v předchozí úloze. Hledaný čas získal vydělením dráhy rychlostí – úvahou, kolikrát se 10 km vejde do 12,5 km, tolikrát bude hledaný čas větší než 1 hodina. Výsledný čas uvádí pro cestu tam a zpět, přestože otázka směřovala pouze na cestu tam. Dobu jízdy při rychlosti 20 km/h řeší stejným způsobem. Žák VZ5 úlohu 4 neřešil. Žák MZ5 použil při určení času jízdy při rychlosti 10 km/h chybnou úvahu, kterou nedokázal zdůvodnit. Nicméně z chybně získaného času pro rychlost 10 km/h správnou úvahou – kolikrát větší je rychlost, tolikrát kratší je čas, určil dobu jízdy při rychlosti 20 km/h.



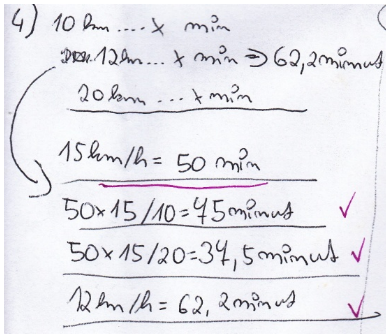
Obr. 6.21: Řešení čtvrté úlohy žákem 7. ročníku (VB7).

Žák VB7 si v prvním kroku vypočítal dráhu podle vztahů používaných ve fyzice ($s = v \cdot t$). Při výpočtu se dopustil chybného vyjádření času v hodinách, což se projevilo i v nepřesném vyjádření dráhy – místo správného údaje 12,5 km uvádí 12,45 km. Úlohu řeší opakovaným použitím trojčlenky. V prvních dvou výpočtech je neznámá vyjádřena správně. Ve třetí úloze hodnoty uspořádal chybně. Je patrné, že trojčlenku používá automaticky bez reflexe obdrženého výsledku – nepozastavuje se nad tím, že pro kratší úsek vychází delší čas. Zajímavé je, že žák opět převedl úlohu na nepřímou úměrnost – závislost rychlosti na čase, na úlohu na přímou úměrnost – závislost dráhy na čase.



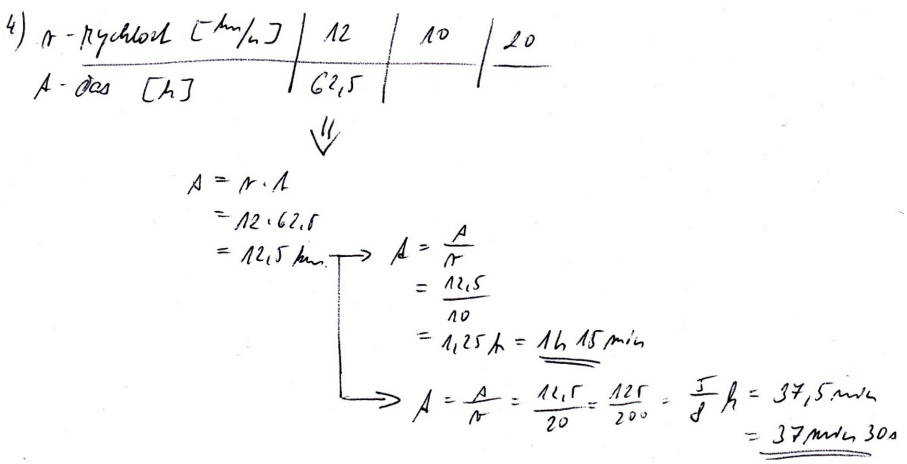
Obr. 6.22: Řešení čtvrté úlohy žákem 7. ročníku (JU7).

Žák JU7 řeší úlohu obdobným způsobem jako úlohu 3. Jedná se o správné řešení. Hodnoty zanáší do tabulky. Při řešení opět využívá dobu odpovídající jednotkové rychlosti.



Obr. 6.23: Řešení čtvrté úlohy žákyní 9. ročníku (MW).

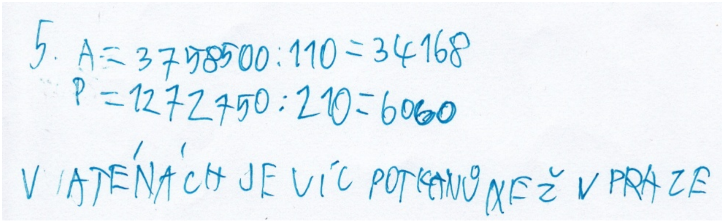
Obě žákyně použily stejný postup řešení jako u předchozí úlohy 3. Jedná se o správná řešení.



Obr. 6.24: Řešení čtvrté úlohy studentem 3. ročníku SŠ (JI12).

Student při komentování svého řešení zmínil, že na začátku si údaje napsal do tabulky a chtěl úlohu řešit úvahou: „kolikrát menší rychlost, tolikrát delší čas“. Pokusil se o úvahu – kolikrát je 10 menší než 12. Při tom si uvědomil, že by řešení vedlo přes počítání se zlomky. Tomu se chtěl vyhnout (uvedl, že přes zlomky by to také zvládnul, jen se mu do tohoto řešení nechtělo), proto upřednostnil výpočet s využitím vztahů mezi dráhou, rychlostí a časem. Když vše dopočítal, uvědomil si, že určení času pro rychlost 20km/h již mohl rychleji vypočítat prvotní úvahou „kolikrát větší rychlost, tolikrát kratší čas“ z hodnoty 10 km/h. V zápisu se vyskytují dvě drobné chyby. Jednak v tabulce neodpovídají jednotky času uvedené hodnotě a jednak v zápisu výpočtu dráhy se vyskytuje hodnota 62,5 minut, přestože student počítá s hodnotou v hodinách, se kterou dochází ke správnému výsledku. Z rozhovoru vyplynulo, že chyby byly způsobené nepozorností.

6.5 Strategie řešení pro úlohu 5

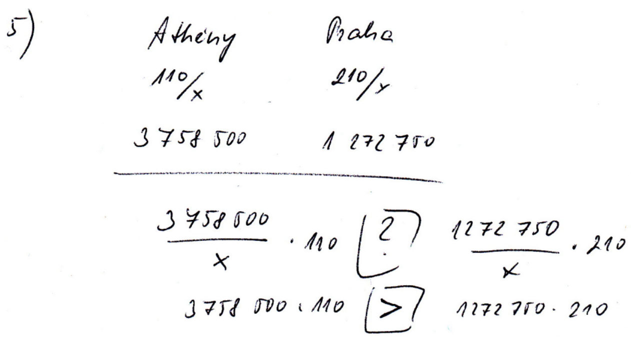


Obr. 6.25: Řešení páté úlohy žákem 5. ročníku (VZ5).

Jedná se o chybné řešení, resp. o správnou odpověď vycházející z nesprávného postupu. Za pozornost stojí, že stejné chyby se dopustil i další žák 5. ročníku MZ5. Oba žáci nedokázali svůj postup zdůvodnit. Žák DN se o řešení této úlohy nepokusil.

Žák 7. ročníku VB7 se o řešení úlohy 5 nepokusil. Žák JU7 uvedl sice správnou odpověď, ale nedokázal ji písemně ani ústně zdůvodnit.

Žákyně MW9 pouze uvedla: „Ne, nedá, nebo to neumím.“ Žákyně VJ9 uvedla: „Pokud beru to, že obě začerněná čísla jsou stejná, pak ano.“ a doprovodila vypočítaným počtem potkanů pro případ, že hustota výskytu potkanů je vztažená na jednoho obyvatele. Při následném rozhovoru mi jednak popsala, jak k uvedeným hodnotám došla a zároveň vysvětlila, že při jiném počtu obyvatel, na který se hustota výskytu potkanů vztahuje, dojdeme ke stejnému závěru. Při rozboru řešení zdůraznila, že měla problém s nejednoznačností zadání. Nebyla si jistá, zda opravdu má vycházet z faktu, že začerněná čísla jsou stejná.

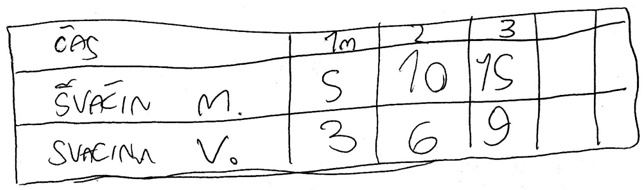


Obr. 6.26: Řešení páté úlohy studentem 3. ročníku SŠ (JI12).

Při řešení student uvažoval, jak by postupoval, kdyby začerněná hodnota byla známá. Řekl si, že by počet obyvatel vydělil touto hodnotou (na obrázku 6.26 označeno *x*). Tím by zjistil, kolikrát je celkový počet obyvatel ve městě větší než počet obyvatel *x*. Tolikrát musí být i počet potkanů větší, než kolik jich připadá na *x*. Uvedenou úvahu zapsal pro obě města jako dva výrazy. Při hledání odpovědi na otázku, kde žije více potkanů, oba výrazy zasadil do nerovnice, kterou vyřešil.

6.6 Strategie řešení využívané žáky 7. ročníku (druhý vzorek žáků)

V návaznosti na zjištěné strategie a problémová místa u vybraných žáků jsem nabídnul výše uvedené úlohy i ostatním žákům 7. ročníku naší školy. Od rozšíření vzorku jsem si sliboval objevení dalších možných strategií řešení úloh, popř. kritických míst při jejich řešení. 7. ročník jsem volil proto, že v uvedeném ročníku sám učím. Následné rozhovory jsem tentokrát s žáky neprováděl. V 7. ročníku je celkem 13 žáků, z toho jeden žák v den zadání chyběl a dva žáci mají v individuálním vzdělávacím plánu doporučení (redukce učiva, snížená schopnost čtení a porozumění čtenému), na jehož základě jsem jim úlohy nenabídl. Nyní stručně popíšu řešení jednotlivých žáků.



ČAS	1m	2	3		
ŠVAČIN M.	5	10	15		
SVAČINA V.	3	6	9		

Obr. 6.27: Nesprávné řešení první úlohy žákem 7. ročníku (ML7).

Žák ML7 používá při řešení první úlohy tabulku. Údaje jsou zanesené a vypočítané správně, ale nevedou k odpovědi na otázku. Žák neumí tabulku v kontextu úlohy správně použít. U ostatních úloh uvádí jen výsledky bez naznačeného postupu. Pouze v úloze 3 je uvedený výsledek správný.

Žák KK7 u úlohy 1 provádí úvahu reprezentovanou následujícími výpočty. Postup je správný, neuvádí však slovní odpověď.

$$200 : 60 \ \cdot 3 = 10$$

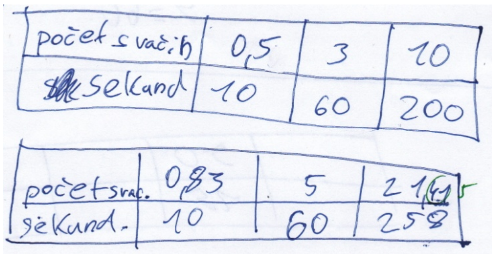
$$258 : 60 \ \cdot 5 = 21{,}5$$

V úloze 2 se objevuje následující zápis. S ohledem na správnost výpočtu je překvapivá odpověď: „Jáchym nic neušetří na sobě.“

$$16{,}2 : 4 = 1 \text{ dítě } \cdot 3 = 12 \text{ min. } 15 \text{ sekund}$$

Úlohy 3 a 4 řeší obdobně a to způsobem: 50 minut · 15 km/h : 12 km/h = 62,5 minut. U úlohy 5 neuvádí postup řešení.

Žákyně KŠ7 řeší úlohy obdobně jako KK7. U úlohy 2 se objevuje opět problém při interpretaci času 16 minut a 20 sekund, který zapisuje jako 16,20 minut. Uvádí sice, kolik času by trvalo přepsání textu čtyřem osobám, ale odpověď na otázku *„Kolik času si Jáchym mohl ušetřit?“* zde uvedená není. V úloze 5 používá nesprávný postup – dělí počet obyvatel jednotlivých měst hustotou výskytu potkanů.



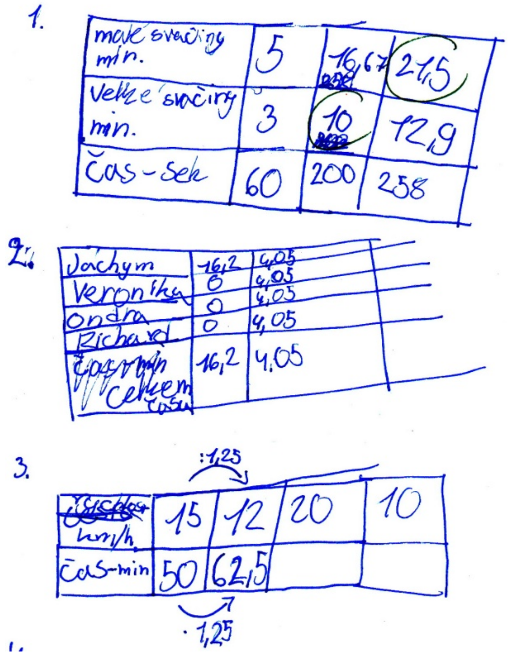
Obr. 6.28: Správné řešení první úlohy žákem 7. ročníku (SN7).

Žák SN7 úlohu jedna uchopil jako závislost mezi počtem sbalených svačin a časem jejich balení. Používá strategii „jednotného času“ – počty svačin přepočítává na čas 10 sekund. Opět chybí slovní odpověď na otázku. V úloze 2 se dopouští podobné chyby jako žákyně KŠ7 při interpretaci času. Správně zmenšuje čas jedné osoby při přepočtu na čtyři osoby. Uvádí i správnou odpověď. V úloze 3 provádí výpočet:

$$15\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} : 12\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 1{,}25$$

$$1{,}25 \cdot 50 \text{ minut} = 62{,}5 \text{ minut}$$

Úlohu 4 řeší obdobně, chybí však druhý výsledek – čas při rychlosti 20 km/h. V úloze 5 je uvedená pouze odpověď bez jakéhokoliv zdůvodnění a výpočtu.



Obr. 6.29: Řešení první až třetí úlohy žákyní 7. ročníku (AI7).

Žákyně AI7 v úloze 1 správně pracuje s tabulkou, ale z vypočítaných údajů nezapíše odpověď. Navíc v tabulce vypočítává údaje, které k zodpovězení otázky nejsou potřebné. V úloze 2 opět pracuje s tabulkou. Každému z žáků přiřazuje čas odpovídající přepisování textu jedním člověkem. Neuvádí však čas odpovídající současnému přepisování textu čtyřmi osobami. I v úlohách 3 a 4 pracuje s tabulkou, do které zanáší závislost rychlosti na čase. Zajímavé je, že ve výpočtu nejde přes jednotkovou hodnotu, ale přímo určí, kolikrát je 12 km/h menší než 15 km/h a tolikrát zvětší i čas odpovídající 15 km/h. U úlohy 5 chybí zdůvodnění odpovědi.

Žák RS7 řeší úlohu 1 obdobně jako například KK7. Jako jediný uvádí i slovní odpověď. V úloze 2 přepočítává zadaný čas na sekundy a správně jej přepočítává na čtyři osoby. Odečtením obou časů získává správný výsledek. Uvádí i slovní odpověď. U úloh 3 a 4 jako jediný rozepisuje výsledné časy na celé hodiny, minuty a sekundy. U 5. úlohy chybí zdůvodnění uvedené odpovědi.

Žáci GU7 a MCh7 si s žádnou z úloh 1 až 5 nevěděli rady.

Úspěšnost řešení jednotlivých úloh u žáků 7. ročníku je uvedena v tabulce 6.4.

6.7 Závěr z vlastního výzkumu

Z analyzovaných řešení lze vyvodit některé obecnější závěry. Žáci většinou dávali přednost takovým řešením, která šla přes mezivýsledky mající reálný význam. Například u úlohy 1 to bylo určení doby balení jedné svačiny (žáci VZ5, MZ5). Naopak menší reálnost mezivýsledků lze vypozorovat u žákyň devátého ročníku MW9 a VJ9, které provedly převod ze sekund na minuty spíše automaticky – vydělením šedesáti. Středoškolský student pracuje také s jistou představou – počtu svačin za jednu sekundu. Taková představa je již méně reálná vzhledem k tomu, že nevychází celé číslo. I proto se pravděpodobně objevila až u staršího studenta. U třetí úlohy se reálný mezivýsledek – dráha – objevuje u všech žáků, kteří tuto úlohu úspěšně vyřešili. I středoškolský student tuto strategii preferuje, přestože si uvědomuje i jinou možnost řešení.

Překvapující je, že žádný z žáků u úlohy 1 nepoužil úvahu nenumerického porovnání (balení menších svačin je rychlejší a zároveň je na něj vyčleněno i více času). Žádného z žáků také nenapadlo, aby se na údaj počtu sbalených svačin za určitý čas podívali jako na „rychlost balení svačin“ a při řešení pak využili vztah nepřímé úměrnosti mezi rychlostí balení svačin a počtem sbalených svačin. Podobně u úlohy 3, kde je rychlost cyklisty nepřímo úměrná době ujetí určité vzdálenosti, žáci většinově nepracují s myšlenkou – kolikrát větší rychlost, tolikrát kratší čas. Pouze středoškolský student tuto variantu zvažoval jako možnou, ale nakonec upřednostnil stejnou úvahu jako ostatní žáci. Při řešení úlohy 2 se u všech žáků objevila správná úvaha – kolikrát více osob, tolikrát kratší čas na přepsání textu. Nejmenší úspěšnost řešení byla zaznamenána u úlohy 5. Zde se žáci většinově pokoušeli vydělit počet obyvatel hustotou výskytu potkanů. Při následném rozhovoru nedokázali tuto úvahu vysvětlit.

Z analyzovaných řešení lze vypozorovat rozdíly v řešení úloh u žáků, kteří jsou, a u žáků, kteří nejsou ovlivněni aktuálním výkladem tématu nepřímé úměrnosti. Žáci, kteří si nedávno prošli výkladem nepřímé úměrnosti, preferují předkládané strategie řešení – tabulkou, trojčlenkou. Naopak druhá skupina žáků tyto strategie převážně nepoužívá. Analýza také potvrdila častý výskyt strategie řešení „přes jednotkovou hodnotu“. Četnost této strategie zachycují tabulky 6.1 a 6.2. U úlohy 2 „jednotková strategie“ nemůže být přítomna, protože v zadání je tato hodnota již zadaná. Řada žáků používá u úloh 3 a 4 vztahy mezi dráhou, rychlostí a časem, které mají zažité z fyziky. Největší problémy žákům dělala úloha 5, kterou úspěšně vyřešili pouze dva z nich (VJ9, JI12).

	5. třída ZŠ			7. třída ZŠ		9. třída ZŠ		SŠ
žák	MZ5	VZ5	DN5	VB7	JU7	MW9	VJ9	JI12
úloha 1	+	+	+	-	+	-	-	+
úloha 3	-	-	+	-	+	-	-	-
úloha 4	-	-	-	-	+	-	-	-
úloha 5	-	-	-	-	-	-	-	-

Tab. 6.1: Výskyt strategie řešení „přes jednotkovou hodnotu“ u prvního vzorku žáků.

žák	VB7	JU7	ML7	KK7	KŠ7	SN7	AI7	RS7	GU7	MCh7
úloha 1	-	+	-	-	-	+	-	+	-	-
úloha 3	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-
úloha 4	-	+		-	-	-	-	-	-	-
úloha 5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tab. 6.2: Výskyt strategie řešení „přes jednotkovou hodnotu“ u druhého vzorku žáků.

Další postřehy nejsou zobecnitelné ani v rámci zkoumaného vzorku žáků, ale minimálně ilustrují jevy, které by se mohly u žáků vyskytovat. Například u žákyně MW9 lze vypozorovat, že preferuje práci se zlomky. To je jistě správný přístup, ale nemá toto téma dostatečně zvládnuté (viz krácení zlomků při jejich dělení v úloze 2) a někdy nasazuje práci se zlomky tam, kde lze snadněji pracovat s desetinnými nebo dokonce s přirozenými čísly (například u úlohy 1). Za důležité zjištění považuji, že žáci si často snaží vybavit postupy, které se kdysi učili (opakovaně u žákyň devátého ročníku MW9 a VJ9). Až když zjišťují, že si tímto postupem nejsou jistí, začínají konstruovat vlastní řešení. Zajímavý moment se vyskytl u žáka 7. ročníku VB7, který úlohy na nepřímou úměrnost převádí na úlohy na přímou úměrnost. U několika žáků se vyskytly chyby v práci se zlomky a v převádění času mezi desítkovou a šedesátkovou soustavou. Úspěšnost řešení jednotlivých úloh zachycují tabulky 6.3 a 6.4. Za správná řešení jsem považoval ta, v nichž:

- žák došel ke správnému řešení správným postupem
- žák se dopustil méně zásadní chyby, ale z postupu či rozhovoru je zřejmé, že uvažoval správně
- žák neuvedl správnou odpověď, tu však doplnil při následném rozhovoru.

	5. třída ZŠ			7. třída ZŠ		9. třída ZŠ		SŠ
žák	MZ5	VZ5	DN5	VB7	JU7	MW9	VJ9	JI12
úloha 1	+	+	+	+	+	+	+	+
úloha 2	+	+	+	+	+	-	+	+
úloha 3	-	-	+	+	+	+	+	+
úloha 4	-	-	+	-	+	+	+	+
úloha 5	-	-	-	-	-	-	+	+

Tab. 6.3: Úspěšnost řešení úloh u prvního vzorku žáků.

žák	VB7	JU7	ML7	KK7	KŠ7	SN7	AI7	RS7	GU7	MCh7
úloha 1	+	+	-	+	+	+	+/-	+	-	-
úloha 2	+	+	-	+	-	+	-	+	-	-
úloha 3	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-
úloha 4	-	+	-	+	+	+/-	+	+	-	-
úloha 5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tab. 6.4: Úspěšnost řešení úloh u druhého vzorku žáků.

7. Didaktické praktiky vybraných učitelů matematiky u tématu nepřímá úměrnost

Další část mého výzkumu se týkala analýzy úvodních rozhovorů s učiteli, náslechů na jejich vyučovacích hodinách, rozhovorů týkajících se rozborů náslechových hodin a dalších doplňujících informací a materiálů poskytnutých učitelem. Veškeré rozhovory byly zaznamenány jako audio nahrávky, ty následně přepsány a poté analyzovány postupy a technikami metody zakotvené teorie (Strauss, Corbinová, 1999). V souladu s touto teorií jsem zvolil určitou strukturu otázek a kategorií, které jsem očekával, že se v záznamech vyskytnou. Tuto strukturu jsem průběžně upravoval – na základě konkrétních informací a jevů z rozhovorů a z náslechů, na základě hledání a nacházení podobných pojmů, jejich zařazování do kategorií a subkategorií a při uvažování nad způsobem škálování těchto kategorií.

Při výběru učitelů jsem chtěl minimalizovat riziko formálního přístupu ze strany učitelů, proto jsem oslovil ty, se kterými jsem v minulosti spolupracoval (MH, JS), a toho, kterého mi bývalí spolupracovníci doporučili (JKN). Základní informace týkající se učitelů a realizovaných rozhovorů zachycuje tabulka 7.1.

iniciály učitele	*délka praxe na ZŠ/SŠ v době konání rozhovoru*	*termín realizace rozhovorů a náslechů*	*místo působení učitele v období konání rozhovorů*	*počet (kód) realizovaných rozhovorů*	*počet (kód) náslechů*
JKN	0 let/40 let	11.11. 2011 - 14.11. 2011	Gymnázium Praha	1 (A1)	1 (AN1)
MH	9 let/0 let	16.11. 2012 - 15.2. 2013	ZŠ malé město mimo Prahu	4 (B1 až B4)	3 (BN1 až BN3)
JS	34 let/0 let	4.6. 2013 - 6.6. 2013	ZŠ Praha	2 (C1 až C2)	1 (CN1)

Tab. 7.1: Základní informace o rozhovorech s učiteli.

Cílem rozhovorů vedených s oslovenými učiteli bylo zjistit:

- didaktické praktiky používané těmito učiteli při výuce nepřímé úměrnosti a výuce příbuzných témat
- jakými prostředky překonávají úskalí – kritická místa, která v tomto tématu spatřují (popř. je konfrontovat s úskalími, která v tématu vidím já či další oslovení učitelé)
- jaké přístupy a jaké výukové metody při výuce matematiky uplatňují
- jak a v jaké míře zacházejí s učebními materiály (učebnice, vlastní či převzaté materiály)

- na základě četnosti výskytu v analyzovaných rozhovorech, na které aspekty učitelé kladou vyšší důraz (i nevědomě)
- u rozhovorů navazujících na náslechy platnost některých zjištění (potvrzení vlastních závěrů z náslechu)

K těmto cílům jsem formuloval otázky, které tvořily základní rámec polostrukturovaných rozhovorů:

- Jaké metody a formy práce ve výuce využíváte?
- Jaké používáte učebnice? Využíváte některé další výukové materiály? Jak s těmito materiály pracujete?
- Setkáváte se s problémy žáků v některých oblastech matematiky pravidelně?
- Pozorujete nějaká kritická místa při výkladu tématu nepřímé úměrnosti? Jakých chyb se žáci v tomto tématu nejčastěji dopouštějí?
- Jak takové momenty překonáváte?

Toto jsou pouze základní oblasti směřování dotazů. Je pravděpodobné, že se objeví i další okruhy otázek vyvolané konkrétními odpověďmi učitelů.

Cílem provedených náslechů bylo:

- potvrzení či vyvrácení informací uváděných učiteli v předchozích rozhovorech
- zdokumentování obtíží žáků a způsobů jejich překonávání (samotnými žáky či učiteli) v konkrétní vyučovací hodině
- získání dalších otázek pro následný rozhovor

V textu místy odkazuji na přepisy jednotlivých rozhovorů. Vzhledem k většímu rozsahu přepisů uvádím v příloze pouze jeden ilustrativní příklad (příloha B1). Ostatní mohu na požádání poskytnout.

7.1 Rozhovor A1, učitel JNK, Gymnázium Praha

Jednalo se o rozhovor s učitelem šestiletého gymnázia. Vzhledem k časovým možnostem pana učitele jsme se dohodli pouze na jednom rozhovoru (viz příloha A1) a následném náslechu na jedné z vyučovacích hodin. Rozhovor proběhl 11. 11. 2011. Jeho analýzou jsem získal data, která jsou zanesená v tabulce v příloze Y1. Přestože vlastní rozhovor byl realizován časově jako první, jeho analýzu jsem provedl až po zpracování rozhovorů B1 – B4. Strukturu kategorií, která se vykrystalizovala právě z rozhovorů B1 – B4, jsem použil až následně pro rozhovor A1.

Z analýzy vyplynula následující zjištění:

- Nejvyšší četnost byla zjištěna u kategorií Osoba učitele (celková četnost 11; vyšší četnost zaznamenána v podkategorii pojetí učení – četnost 8) a Reprezentace, postupy (četnost 12 s rovnoměrným rozložením četností do jednotlivých podkategorií).
- Střední četnost byla zjištěna v kategoriích Kritická místa (celková četnost 9; vyšší četnost zaznamenána v podkategorii Obecně matematická kritická místa/příbuzná tématu NÚ – četnost 7), Návaznost (celková četnost 5) a Motivace žáků (celková četnost 5).

V rozhovoru byla zmíněna Obecně matematická kritická místa a Kritická místa u příbuzných témat nepřímé úměrnosti (zejména funkcí):

- Názornost v geometrii a stereometrii.
- Dopouštění se elementárních chyb u „jedničkářů“ – soustředění na problém.
- Nepřesnost grafické reprezentace (překonáváno nabízením algebraického popisu funkcí).
- Zakreslování spojitého grafu pro nespojité funkce.
- Absolutní hodnota podílu je rovná podílu dvou absolutních hodnot.
- Sestrojení grafu funkce ze zadaného předpisu funkce.

V rozhovoru byla zmíněna kritická místa týkající se tématu nepřímé úměrnosti:

- Zařazování (resp. nezařazování) úloh na nepřímou úměrnost do jedné kapitoly. Žáci tak předem mohou očekávat určitý typ úlohy, aniž jsou nuceni identifikovat typ úlohy a volit strategii řešení.

Kategorie	Citace
Motivace	*6 – Jako největší úspěch považuji, jestli jsem zaujal většinu třídy.*
Pojetí učení	*33 – Zopakuji, s čím by to mělo souviset. Což si myslím, že je to nejdůležitější, protože by měli znát souvislosti, než se biflovat.*
Kritická místa	*48 – Jedničkáři, pokud jsou, tak selžou spíš v těch jednoduchých věcech, dělají takové primitivní chyby, ať už je to sčítání nebo násobení a takhle …, protože si už myslí, že to mají zažitý a už přemýšlejí nad tím problémem, který je pro ně podstatnější. Takže pak udělají takovou hrubou chybu, kterou by, kdyby nad tím přemýšleli, neudělali.*
Podmínky pro práci učitele	*54 – Já mám takový názor, že to ŠVP by neměli dělat učitelé, ale kdysi to byl pedagogický ústav, to by měli udělat oni, měli by maximálně shromažďovat náměty těch učitelů. Neboť, ať je to jak chce, tak za vzdělání ručí stát a ne nějaká škola. Takže stát by měl zaručit, že naše děti nebo studenti, budou mít určité vzdělání určité úrovně. Takže maximálně se může škola profilovat, dejme tomu v různých aktivitách …*

Zavedení	*64 – Čili začneme tím, že když se kladná veličina vynásobí kladným koeficientem, tak platí to, co už bylo řečeno, no a pak když udělám nějakou tabulčičku, to záleží, jak jsou schopní ty studenti, tak z ní vysvítá, že ten součin musí být vždycky konstantní. Takže začnu vlastně tvarem x krát y se rovná nějaké konstantě.*

Tab. 7.2: Vybrané citace z rozhovoru A1 pro vybrané kategorie.

7.2 Pozorování – náslech AN1, učitel JNK, Gymnázium Praha

Náslech proběhl ve 4. ročníku šestiletého gymnázia dne 14. 11. 2011. Tématem hodiny byly *Lineární lomené funkce a nepřímá úměrnost*, kterým předcházel výklad témat *Lineární funkce, Funkce s absolutními hodnotami, Kvadratické funkce, Grafické řešení rovnic a nerovnic*.

Cílem hodiny bylo zopakovat pojmy, jako je nepřímá úměrnost, a aplikovat poznatky z předchozích témat při vyšetřování lineárních lomených funkcí.

- *Opakovací část*

Na začátku hodiny učitel shrnul znalosti, které by žáci o nepřímé úměrnosti měli mít:

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x}}; \boldsymbol{k} \in \mathbb{R} \setminus \{\boldsymbol{0}\}; \boldsymbol{Df} = \mathbb{R} \setminus \{\boldsymbol{0}\}; \boldsymbol{Hf} = \mathbb{R} \setminus \{\boldsymbol{0}\}.$$

Na tabuli načrtl graf – přes nalezené body s *x*-ovou souřadnicí $+1$ a -1. Pojmenoval vzniklou křivku jako rovnoosou hyperbolu. Vyzval žáky k určení, zda se jedná o funkci rostoucí/klesající na $\boldsymbol{Df}$, rostoucí/klesající na intervalu, omezenou, prostou, sudou/lichou. Dále společně s žáky zkoumal vliv koeficientu *k* na podobu grafu, konkrétně na funkcích $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{x}}$; $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{x}}$. Žáci nejprve předpověděli, jak se změna koeficientu projeví, poté učitel přes náčrtek grafu potvrdil jejich odpovědi.

- *Procvičovací část hodiny*

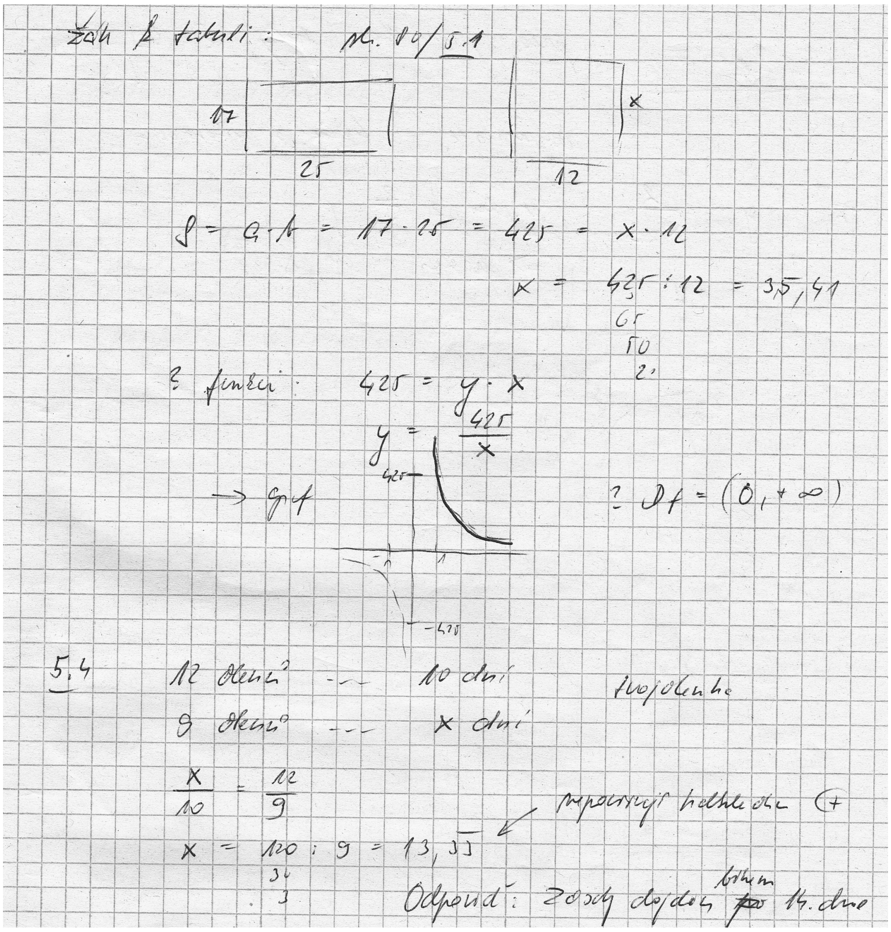
V další části hodiny proběhlo procvičování učiva. Žáci řešili úlohy z učebnice (Odvárko, 1993) na tabuli. První řešená úloha byla úloha 5.1 na obrázku 7.1, následovala úloha 5.4 na obrázku 7.2. Na obrázku 7.3 uvádím přepis řešení tak, jak jej zapisovali žáci na tabuli.

5.1 Obdélníková parcela o rozměrech 25 metrů a 17 metrů má být vyměněna za jinou parcelu obdélníkového tvaru, která bude mít stejnou výměru, ale její šířka bude 12 metrů. Jakou délku bude mít nová parcela?

Obr. 7.1: (Odvárko, 1993, s. 80)

∗5.4 Horská expedice měla mít původně 12 členů, byly zakoupeny zásoby na 10 dní. Nakonec se však vydalo na cestu pouze 9 lidí. Hospodář expedice prohlašuje, že zásoby stačí na 15 dní, a zdůvodňuje to takto: Kdyby měla expedice 6 členů, vystačily by zásoby na 20 dní; 9 je aritmetickým průměrem 6 a 12 $\left(\frac{6+12}{2} = 9\right)$, aritmetický průměr 10 a 20 je 15 $\left(\frac{10+20}{2} = 15\right)$. Uvažuje hospodář expedice správně? Stačí zásoby skutečně na 15 dní?

Obr. 7.2: (Odvárko, 1993, s. 81)



Obr. 7.3: Přepis řešení úloh 5.1 a 5.4.

U úlohy 5.1 žák samostatně provedl řešení a odpověděl na otázku. Společně se třídou učitel dále sestavil rovnici nepřímé úměrnosti, určil definiční obor této konkrétní závislosti a načrtnul její graf. Úlohu 5.4 žák řešil bez zásahu učitele pomocí trojčlenky.

- *Výklad tématu Lineární lomená funkce*

  Učitel nabídl předpis:

$$\boldsymbol{y = \frac{ax+b}{cx+d}; Df = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-d}{c}\right\}; ad - bc \neq 0; c \neq 0}.$$

se zdůvodněním podmínek. Žáků se zeptal, o jakou funkci by se jednalo, kdyby uvedené podmínky nebyly splněny.

Učitel zadal předpis: $\boldsymbol{y = \frac{1}{x} + 2 = \frac{2x+1}{x}}$. Ptal se žáků, jak z druhého vyjádření získají to první. Připomněl pravidla pro sčítání zlomků. Upozornil na výhodnost prvního předpisu při zakreslování grafu příslušné funkce, resp. žáci ji okamžitě vidí. Je zřejmé, že to mají procvičeno z předchozích témat. Učitel již v rychlosti načrtl graf přes určení asymptot a „jedničkových bodů“: $[\mathbf{1}; ?]$ a $[?; \mathbf{1}]$.

Učitel na tabuli průběžným dotazováním k žákům odvodil z předpisu $\boldsymbol{y = \frac{2}{x-3}}$ příslušný graf. Žáci rutině aplikovali postupy, které používali již dříve u jiných funkcí. Jednalo se zejména o posuny grafu základní funkce na osách *x* či *y*.

- *Závěr*

Při vyučování dominoval frontální výklad učitele. Výklad byl ve vyšším tempu s malým prostorem pro individualizaci výuky a pro vyjádření samotných žáků. Ti se dostávali ke slovu většinou jen u otázek s předpokládanou krátkou odpovědí. Hodina potvrdila (viz analýza rozhovoru v oddíle 7.1), že učitel preferuje řešení úloh na nepřímou úměrnost prostřednictvím rovnice – např. u úlohy 5.1 rovnici dodatečně nabídl, přestože žákovské řešení s rovnicí spíše nepracuje. Byl pozorován důraz na procvičování standardních postupů při vyšetřování průběhů funkce. Jiné prvky zmiňované při rozhovoru s učitelem (A1) se při náslechu naopak neobjevily – například nabídka dobrovolných domácích úkolů či důraz na zařazování učiva do souvislostí.

7.3 Rozhovory B1 – B4, učitelka MH, ZŠ malé město mimo Prahu

Po prvním náslechu (viz příloha B1) se vykrystalizovala následující struktura – viz tabulka 7.4. Jednalo se o úvodní rozhovor, pořízený v době předcházející výkladu nepřímé úměrnosti.

Následující rozhovory se již měly více dotýkat tématu mé práce – nepřímé úměrnosti. Druhý rozhovor (viz příloha B2) se odehrál v návaznosti na úvodní hodinu k tématu nepřímé úměrnosti. Třetí rozhovor (viz příloha B3) předcházel vyučovací hodině věnované grafu nepřímé úměrnosti a čtvrtý rozhovor (viz příloha B4) proběhl na závěr výkladu tématu nepřímé úměrnosti. S ohledem na odlišné zaměření jednotlivých rozhovorů (plynoucí z předem dané struktury rozhovorů a z jejich časového zasazení vzhledem k výkladu nepřímé úměrnosti) jsem volil i poněkud odlišné kategorie. Ty kategorie, které se objevovaly specificky v jednom rozhovoru, jsem ponechal a pro přehlednost vše zanesl do oddělených tabulek (viz příloha Y2). Až následně jsem se snažil najít průnik mezi rozhovory.

Z analýzy rozhovorů vyplynula následující zjištění:

- V prvním rozhovoru bylo nejvíce výpovědí zařazeno do kategorií – Osoba učitele (četnost výskytu 20), Vyučovací metody (četnost výskytu 6) a Podmínky pro práci učitele (četnost výskytu 15). Naopak střední a nízký výskyt byl zaznamenán u kategorií Učební materiály (četnost výskytu 5) a Kritická místa (četnost výskytu 2).

- V druhém rozhovoru převládaly výpovědi z kategorií Osoba učitele (četnost výskytu 24), Učební materiály (četnost výskytu 23) a Reprezentace, postupy (četnost výskytu 22). Střední četnost byla zaznamenána u kategorie Kritická místa – nepřímá úměrnost (četnost výskytu 12).
- Analýza třetího rozhovoru přinesla relativně rovnoměrné rozvržení v kategoriích s nízkou a střední četností. Střední a vyšší výskyt byl pozorován u kategorií Kritická místa (četnost výskytu 13), Reprezentace, postupy (četnost výskytu 13), Návaznost (četnost výskytu 7), Osoba učitele, Ne-modely (četnost výskytu 5).
- Čtvrtý rozhovor přinesl výpovědi s nízkou četností pro kategorie: Osoba učitele, Motivace žáků, Práce s chybou, Ne-modely, Návaznost, Zavedení a s vyšší četností pro kategorie: Reprezentace, postupy (četnost výskytu 24) a Kritická místa (četnost výskytu 18).
- Z porovnání všech rozhovorů plyne jejich odlišné zaměření. Výskyt společných kategorií, byť pokaždé s jinou četností, naopak může dokládat význam, který jim přikládá osoba učitele. Takovou kategorií se zdá být Osoba učitele (s podkategoriemi Pojetí učení, Sebereflexe).

Kategorie Kritická místa je stěžejní s ohledem na téma diplomové práce, proto ji dále věnuji více prostoru. V rozhovorech jsem rozlišoval tři její podkategorie: Obecně matematická, Nepřímá úměrnost, Příbuzná tématu NÚ.

Výskyt kritických míst v podkategorii Obecně matematická kritická místa:

- Zlomky (obecně), záporná čísla (dva minusy), zobecňování v algebře, individualizace při práci s žáky, víceúrovňové úlohy, funkční myšlení, logické myšlení u slovních úloh, vícekrokové konstrukční úlohy.
- Zlomek žáci nevnímají jako jedno číslo.
- Převody jednotek.
- U jednotek času převody mezi desítkovou a šedesátkovou číselnou soustavou.
- Komutativnost násobení.
- Dělení desetinných čísel – desetinný rozvoj žáci vnímají jako zbytek.
- Nestandardní úlohy, nestandardní kladení otázek.
- Algebraický zápis – výrazy, rovnice, vzorce, funkční zápis
- Motivace – umožnit žákům zažít úspěch.

Výskyt Kritických míst v podkategorii Nepřímá úměrnost:

- Přijetí myšlenky, že kolikrát bude více dělníků, tolikrát bude kratší čas na vykonání dané práce (viz tab. 7.3).

- Řešení úloh na přímou a nepřímou úměrnost s delším časovým odstupem od výkladu tématu.
- Žáci vyžadují jednoduchý návod na řešení a učitelé jim v tom často vycházejí vstříc.
- Nezohlednění životní zkušenosti při řešení úloh.
- Idealizace v zadáních slovních úloh.
- Žáci jdou u nepřímé úměrnosti často po stejně velkých krocích. Například v níže uvedené úloze často určí dobu odpovídající třem dělníkům jako 6 hodin.

počet dělníků	2	3	4
čas na postavení zdi	8 hodin		4 hodiny

Překonávání kritických míst:

- Učitel používá spirálovitý výklad učiva a gradované úlohy.
- Nabízení dostatečného množství izolovaných modelů.
- Práce se zdánlivými modely a ne-modely.
- Vybraným žákům nahrazovat symbolický algebraický zápis slovním zápisem. Symbolický zápis by se měl vytvořit přirozeně jako potřeba zestručnění zápisu.
- Individualizace ve výuce.
- Připuštění různých strategií řešení u různých žáků.
- Nabízení intuitivní „jednotkové strategie“.
- Při zanášení bodů s jednou nulovou souřadnicí do pravoúhlé soustavy souřadnic se nejdříve přibližujeme přes body s nenulovými souřadnicemi.

Výskyt kritických míst v podkategorii Příbuzná témata NÚ:

- Určení poměru délek stran a obsahů rovinných obrazců.
- Používání ekvivalentních úprav rovnic u trojčlenky. Paní učitelka upozorňuje, že v období, kdy trojčlenku vyučuje, žáci ještě neumí řešit rovnice se zlomky.
- Zanášení bodů s jednou nulovou souřadnicí do pravoúhlé soustavy souřadnic.
- Nejednotné měřítko v rámci jedné osy při vytváření pravoúhlé soustavy souřadnic.

Kategorie/podkategorie	Citace
Osoba učitele – pojetí učení	*21 (B1) – U: Děti k objevům docházejí v různém tempu, a tak je důležité nabízet úlohy víceúrovňové. Neodradit je lehkostí ani přílišnou náročností. Cílem je naučit děti pracovat s chybou a učit se z ní. V praxi to ale není tak černobílé. Některé děti si již osvojily formálnější pojetí – řekni mi, jak to mám dělat a ne proč to tak dělám a je pak těžké je nutit pracovat jinak.*

	Vlastně jediné jak to mohu otočit je, nadchnout je něčím, co jim jde, kde zažijí ten objevitelský pocit. Ideální je pokud si mohu děti od šesté třídy vést …
Vyučovací metody	*27 (B1) – U: No snažím se o konstruktivistický přístup, mám to pořád spojené s tím Hejným. Není to ale tak jednoznačné, hlavně u starších dětí … Chci se zaměřovat na podporující individuální posun žáka, učení se od sebe navzájem, objevování na základě řešení problému. Důležité je spirálovitě se vracet k různým problémům a nabízet gradované úlohy, aby si každý našel to zrovna zajímavé pro sebe. Používám práci s celou třídou, práci se skupinami a také s jednotlivci …*
Podmínky pro práci učitele – vnější	*23 (B1) – U: Selekce je u nás příliš brzy. Osmiletá gymnázia v tomto množství škodí. Když osmiletá gymnázia, tak opravdu pro velmi, velmi malou skupinu. Podobné je to i s výběrovými třídami. Ty bych úplně zrušila.*
Motivace žáků; Osoba učitele – sebereflexe	*27 (B1) – U: Pestrost, zábavnost je pro mě lakmusový papírek, pokud děti matika baví, je to pro mě zrcadlo, že to dělám dobře. Souvisí to hlavně s tím, že nepropadnou frustraci, že je pro ně matika nepochopitelná a dostanou úlohy, které je nenudí a ani neodradí svou náročností, jsou to ty gradované úlohy.*
Učební materiály – učebnice – hodnocení	*12 (B2) – U: Jo, ty učebnice totiž jsou podle mě moc složitý a je tam málo prostoru, tam je to strašně nahňácaný a není tam strukturovaný příklad a nějaká úvaha, nebo možná je, ale na mě to tak nepůsobí (učebnici nemáme před sebou). Ale, co se týká toho pracovního sešitu, tam je prostor, aby to tam mohli doplnit, plus jsou tam hezky udělané úvahy, že opravdu je tam čas pro ty pomalejší na to, aby si tam našli: „aha, dvakrát víc", oni to fakt potřebují.*
Učební materiály – vlastní materiály učitele	*69 (B2) – U: Já opravdu hodně používám toho Hejného, toho nejvíc. A potom vezmu z té oblasti všechny učebnice a vytáhnu si, co mi přijde prostě dobrý a vyzkouším to a když mi to nesedne tak, jak se myslím, tak to předělám. Ale i na každou třídu působí něco jiného. Takže to, co jsem si udělala kdysi dávno, už není aktuální a už dávno myslím, že je špatně.*
Reprezentace, postupy – individuální, přes jednotku, trojčlenka	*12 (B4) – U: No my jsme právě včera, když jsme s tím začínali, jednu úlohu vyřešili přes jedno kilo a pak tu samou úlohu trojčlenkou. Tam byla ukázka toho, že to jde tak i tak. Otázka je, co oni si spojí a co si nespojí. Já si*

	myslím, že oni zjistili, že teď v tomhle neudělají chybu, pokud se naučí systém. A že dojdou k cíli, což si dneska ověřili. A když potom jsem po nich chtěla něco jiného, tak většina nasedla na to, že to chtějí dělat trojčlenkou. A jenom Martin, který je na to logické uvažování, ten jediný tu trojčlenku nedělal a nechtěl. Jinak všichni ostatní to chtěli tou trojčlenkou dělat. Ono je to také podpořené tím, dvě holky tam chodí na doučování a obě dvě už to znali před tím. Ta Anička s Patricií. Jinak je ale důležité jim ukázat, že tohle je jen jeden z postupů, postup naprosto bezmyšlenkovitý. Což potom bylo na konci hodiny hezké, to Martinovo řešení.
Kritická místa – Nepřímá úměrnost	*95 (B2) – U: Já si myslím, že největší zádrhel je, že chtějí přijmout zjednodušenou formu, jak to dělat a my jim to dost často připustíme, např. tím, že řekneme: „Napište si čím víc, tím míň a můžete to řešit trojčlenkou.“ jakmile to připustíme, tak vlastně neklademe důraz na to, uvažujte, dělejte pokaždé tu myšlenkovou cestu a jenom si to vlastně v rychlosti udělejte.*
Kritická místa – Příbuzná témata NÚ	*65 (B3) – U: Tam jediné, co je pro ně problém, když potom hodně rychle nadhodíš ty funkce. Oni brali přímou, nepřímou úměrnost a automaticky měli ypsilon rovná se pět krát x. A pak přestali chápat.* *66 (B3) – J: Jakoby se zalekli něčeho, čemu nerozumí.* *67 (B3) – U: Přesně tak, toho funkčního zápisu. Já si myslím, pro ně to není problém v momentě, dokud jim tam nezačneš to naše pojmenování cpát, které oni ještě nemají daný. A ty funkce by tohle měli teprve naučit.* *69 (B3) – U: Že by to mělo vzniknout, že už mě nebaví psát, kolik peněz to stálo. Protože ono, peníze rovná se počet kusů krát cena za jeden kus, a teď, mě už to tedy nebaví, tak já napíšu $Kč = Ks \cdot cena$, resp. to céčko. Tímhle tím způsobem si myslím, že by měli vznikat vůbec ty neznámý, nebo ty proměnný.*
Kritická místa – obecně matematická	*31 (B1) – U: Pokud chceš konkrétní témata, která jsou přelomová:* *Zlomky … pro základní školu myslím nejdůležitější téma …* *Záporná čísla … tady je asi zákeřná věc dva mínusy …* *Algebra … mít procesy na takové úrovni, že mohu zobecňovat … mám tolik modelů, že to zobecním … problém vidím v tom, že každý do tohoto bodu dojde jindy, ale my učitelé to zadáváme všem najednou …* *Úlohy s pohybem … víceúrovňové úlohy a tím jsou náročné*

	Funkční myšlení … úměrnosti, i v historii matematici začali objevovat až … *Logické myšlení … slovní úlohy …* *Konstrukční úlohy … vícekrokové, vyžaduje to vhled a pochopení vztahů u různých objektů …*
Návaznost	*2 (B4) U: … My jsme se to učili přes úměru* $\frac{x}{24} = \frac{6}{2{,}5}$ *a pak jsme šli takovou tou radou, vždycky vynásobíte tímhle číslem (ukazuje na číslo 24). Já se snažím ty rovnice v tu chvíli vždycky trochu začít. Ale vzhledem k tomu, že v těch šestkách jsem je neměla, tak to nešlo.*
Kritická místa – Nepřímá úměrnost Reprezentace, postupy – kolikrát víc, tolikrát míň	*16 (B2) U: … ta nepřímá úměrnost je mnohem složitější … pro ně vstřebat jenom ten moment, čím více dělníků, tím méně toho času, …*

Tab. 7.3: Vybrané citace z rozhovorů B1 – B4 pro vybrané kategorie.

Kategorie	*Subkategorie*	*Vlastnosti*	*Dimenzionální rozsah*	*Výskyt v rozhovorech*	*Četnost*
Osoba učitele	faktické informace			2	20
	pojetí učení	popis	stručně	2,10,16,25,29,37	
			podrobněji	4,20,23,33,35	
			podrobně	21,27,31	
	sebereflexe	popis	stručně	4,27,35,37	
			podrobněji	10	
Vyučovací metody		výčet	stručně	12,21,23,25	6
			podrobněji	29	
			podrobně	27	
Podmínky pro práci učitele	vnitřní motivace učitele	výčet	stručně	2,4,14	15
			podrobněji	10	
	vnější	výčet	stručně	14,15,17,18	
			podrobně	12,16	
		hodnocení	pozitivní	16	
			negativní	16,23,25,31	
Učební materiály	učebnice	funkce	stručně	17,18,21	5
		koncepce	stručně	20	
	vlastní materiály učitele	struktura	podrobněji	21	
Motivace žáků		výčet	podrobněji	27,31,33	3
Kritická místa	obecně matematická	výčet	stručně	35	2
			podrobně	31	
	nepřímá úměrnost				0

Tab. 7.4: Analýza rozhovoru B1.

7.4 Náslechy BN1 – BN3 a písemné testy, učitelka MH, ZŠ malé město mimo Prahu

Náslechy byly provedeny u paní učitelky MH na základní škole v Dolních Břežanech – náslech BN1 5. 2. 2013, náslech BN2 8. 2. 2013 a náslech BN3 15. 2. 2013.

Jak třídu vidí paní učitelka (zkopírováno z neformálního mailu, který mi paní učitelka poslala před vlastním náslechem):

„Situace v té třídě je trochu problémová. Celé pololetí jsme se vzájemně přesvědčovali, že pracovní listy a logické úvahy jsou potřeba (děti si to nemyslí … a vlastně ani jejich bývalá učitelka

matematiky, která jim prozradila, že ani na gymnáziu se takovým způsobem neučí :-). Nejdu hlavou proti zdi a tak se víc držím teď učebnice, neboť se mi tuto mezibitvu nepovedlo vyhrát. Bude to tedy trochu jinak než obvykle, bude tam víc formalizmu, ale u těchto dětí je to asi zatím jediná cesta, jak je úplně neodradit od matiky. Jejich logika zamrzla na tom, jak se vypočítá obsah a obvod obdélníku, krychle a kvádr je už příliš vysoká laťka :-) Bývalá učitelka jim vše lajnovala a nechtěla nic, co si předem nevypočítali. Na vše měli šablonu a vzorec, to že si to teď nepamatují, neberou jako chybu přístupu, ale to chce čas, doufám :-)."

Při násleších jsem se snažil vnímat momenty, které by potenciálně mohly být označeny jako „kritická místa" nepřímé úměrnosti. Jednalo se o okamžiky, se kterými měli jednotlivci či většina žáků problémy, popř. jsem je já označil za potenciální problém a následně s nimi konfrontoval při rozhovorech paní učitelku. Zároveň jsem vnímal styl výuky učitelky, atmosféru ve třídě, resp. vzájemnou komunikace učitelka – žáci i s ohledem na výše uvedenou charakteristiku třídy, dále práci s různými materiály (učebnice, pracovní listy), používané výukové metody a formy (na třetím náslechu jsem zvolil metodu strukturovaného pozorování). Vybrané momenty (potenciální kritická místa) vyučovací hodiny jsem doplnil vlastním komentářem. Ten propojuje vybrané momenty s následnými rozhovory a popisuje možné příčiny a způsoby překonávání kritického místa. Tyto komentáře jsou kurzívou a uvedené slovy VLASTNÍ KOMENTÁŘ.

7.4.1 Pozorování – náslech BN1

Jednalo se o náslech na hodině, které předcházel výklad přímé úměrnosti a krátký úvod do úměrnosti nepřímé.

- *Atmosféra ve třídě, chování žáků*

Na začátku hodiny se vyskytly problémy s ukázněním žáků. Paní učitelka vše řešila přesednutím jednoho chlapce. Pozornost třídy se po přibližně 5 minutách výrazně zvýšila, s výjimkou zmiňovaného žáka, který dlouhé pasáže z hodiny nevnímal a polehával na lavici.

- *Opakovací část hodiny* (plynule přešla ve výklad nové látky, nerozpoznal jsem přesnou hranici)

Učitelka i žáci uvádějí příklady závislostí (přímá, nepřímá úměrnost), s nimiž se na předchozích hodinách setkali. Řada žáků sama upozorňuje na nejistotu v jejich rozlišování.

VLASTNÍ KOMENTÁŘ: *To může pramenit z nedostatečného množství nabízených modelů. Žáci jsou teprve na začátku tématu.*

Učitelka na závěr této části shrne do poučky:

Čím více, tím více = přímá úměrnost,

Čím více, tím méně = nepřímá úměrnost

- *Zajímavé didaktické momenty*

Příklad 1 nabídnutý jedním z žáků (žáci měli uvádět příklady na výše uvedené poučky): *Čím větší slevu dostanu, tím méně zaplatím.* Rozebíráno při následném rozhovoru.

Příklad 2 nabídnutý učitelkou: *Závislost počtu žáků a doby na vykonání činnosti při zvedání židlí ve třídě*. Učitelka zapisuje údaje do tabulky, zadává počty osob a po dětech chce, aby vypočítaly čas. Zadání doprovází komentářem upřesňujícím podmínky úlohy: „Všichni žáci jsou stejně výkonní, navzájem si nepřekáží, …"

VLASTNÍ KOMENTÁŘ: *Učitelka vychází ze zkušenosti (potvrzeno při následném rozhovoru), kdy některá slovní zadání bývají idealizována. To může být překážkou samotného řešení úlohy (viz ukázky testů v oddílech 7.4.3 a 7.4.5).*

čas	4 min.	2 min.	1 min.
žáků	1	2	4

Někteří žáci si vybaví, že podobnou tabulku dělali pro přímou úměrnost. Paní učitelka pro srovnání píše na tabuli i tabulku přímé úměrnosti:

počet lízátek	4	2	1
cena	1	0,5	0,25

Opět je učitelkou zdůrazňována platnost pravidel pro přímou (nepřímou) úměrnost – čím více, tím více (méně).

VLASTNÍ KOMENTÁŘ: *Zde vidím možné kritické místo (rozebíráno v následném rozhovoru) ve formulaci, která není jednoznačně identifikovatelná. Není zřejmé, jestli je myšleno, kolikrát více, tolikrát více (méně) či o kolik více, o tolik více (méně). Uvedené pravidlo, takto formulované, je použito i v úlohách, které paní učitelka převzala (Hejný, Jirotková, 2010, s. 30) a zařadila do svých pracovních listů (viz cvičení 1 na obr. 2.4 na str. 14). Nicméně zde není pravidlo uváděno jako identifikační znak přímé (nepřímé) úměrnosti. V uvedené hodině to paní učitelka jako pravidlo k rozlišení úměrností však uváděla. Dále zde vidím prostor pro doplnění modelů: čím méně, tím méně (více).*

Zaznívají další příklady typu čím více, tím méně:

Od žáků např.: *Čím více lidí, tím méně jídla na jednoho člověka*.

Od učitelky např.: *Rozdělení pevného počtu lízátek mezi děti ve třídě. Čím více dětí bude ve třídě, tím méně lízátek připadne na jednoho žáka*.

Následuje práce s učebnicí (Odvárko, Kadleček, s. 33).

Žáci si mají každý pro sebe přečíst úvodní úlohu. Po chvilce učitelka doplňuje zadání, ptá se:

„Kdo byl nejrychlejší a kdo nejpomalejší? Kde to zjistím?“ Žáci celkem pohotově a většinově upozorňují na řádek s rychlostmi. Přichází další otázka od učitelky: **„**Jak byste zkontrolovali, že údaje v tabulce jsou správné? Je dobře spočítaná ta tabulka?“

VLASTNÍ KOMENTÁŘ: *Žáci se často setkávají s úlohami, kdy jsou dvě veličiny zadány a třetí se má vypočítat. Zde se však setkali s úlohou, kde jakoby vše vypočítáno je. Učitelka správně s tímto momentem pracuje. Na začátek nechává prostor pro to, aby si na odpověď mohli přijít sami. Poté uvádí tři možné způsoby ověření správnosti dat v tabulce. Úloze je věnován dostatek času.*

Jeden žák po chvilce: „Mohla by být.“ V tabulce vidí, že v jednom řádku se hodnota vždy zvětšuje a ve druhém zmenšuje.

Učitelka: „Tak jak to zjistíme?“

Jeden žák: „Že dráha děleno čas rovná se rychlost.“

Učitelka: „Jak ten vztah použiji? Známe tři veličiny.“

Následně napíše na tabuli první vztah: $\frac{dráha}{čas} = rychlost$. Žáci spontánně uvádějí i další vztahy známé z fyziky: $\frac{dráha}{rychlost} = čas,\ rychlost \cdot čas = dráha$. Učitelka vše zapisuje na tabuli. Vyhýbá se zápisu pomocí značek fyzikálních veličin *s, v, t*.

VLASTNÍ KOMENTÁŘ: *Učitelka má zkušenost, že předčasné nabízení a vyžadování algebraického zápisu může způsobovat neporozumění věcem, které v úvahové rovině žáci většinou zvládají. S tím souvisí i problém se soustředěností na momentálně řešený problém, který se tak pro žáka může stát druhořadým. Jeho soustředěnost se přesouvá jinam, na porozumění algebraickému zápisu.*

Učitelka: „Sami si vyberte vzoreček a zkontrolujte všechny údaje z tabulky do sešitu.“

Po pár minutách následuje kontrola, žáci se střídají u tabule.

Pokyn učitelky: „Opiš si rámeček na straně 33 do sešitu.“

Při opisování si učitelka obchází slabší žáky a individuálně si ověřuje, zda jim je vše jasné.

Na závěr hodiny je zařazena práce s pracovním sešitem (Rosecká, Čuhajová, Nová škola)

Učitelka: „Nalistujte si stránku 30 a společně si přečteme zadání.“

Blíží se konec hodiny, někteří žáci jsou již nesoustředění. Ve třídě je šum, přes který není slyšet méně hlasité čtení jednoho z žáků. Zadání se musí číst opakovaně.

Učitelka: „Nyní si zavřete učebnici a zkuste zadání přetlumočit vlastními slovy.“

Tato pasáž hodiny ztroskotává na nepozornosti žáků. Učitelka nakonec dává cvičení 1 na straně 30 vyplnit za domácí úkol.

- *Závěr*

Ve třídě je chvílemi cítit napětí, jistá frustrace některých žáků, která se více či méně přenáší na ostatní. Ta pravděpodobně plyne z rozporných očekávání učitelky a žáků směrem k formám výuky (objevování, individuální aktivita žáka – frontální metoda, nabízení pravidel, návodů). Učitelka hledá kompromis mezi oběma představami, a tím se snaží tlumit konfliktní situace, ke kterým pravděpodobně v minulosti docházelo.

Cílem hodiny bylo naučit žáky rozlišovat přímou a nepřímou úměrnost na základě poučky. Rozvinout dovednost při práci s tabulkou, se kterou se již setkali u přímé úměrnosti. Žákům je zde často nabízena možnost, aby uváděli vlastní příklady, učitelka je vhodně doplňuje příklady zasazenými do prostředí blízkého dětem (zvedání židlí ve třídě, rozdání lízátek dětem). Opakovaně si ověřuje pochopení žáky (ve vhodných momentech individuálně; přes častá vyvolávání či spontánní odpovědi žáků; přes používání výzev typu: *„Jak byste zkontrolovali, že údaje v tabulce jsou správné?“*). Některé výzvy jsou však málo adresné, a tak nedostává očekávanou zpětnou vazbu (*„Kdybych řekla, najdi jeden příklad přímé úměrnosti a jeden nepřímé úměrnosti, dokázali byste je najít?“*) směrem k pochopení.

7.4.2 Pozorování – náslech BN2

Na předchozích hodinách (po posledním náslechu BN1) pracovali žáci na úlohách z pracovního listu, kde byly zařazeny jak úlohy na přímou či nepřímou úměrnost, tak jedna úloha nespadající ani do jednoho z těchto typů závislostí. Jak práce probíhala, je částečně zmiňováno paní učitelkou v rozhovoru B3. Cílem následující hodiny bylo zavedení pravoúhlé soustavy souřadnic a práce se souřadnicemi bodů. Žáci by měli být schopni zanést bod zadaný jeho souřadnicemi do grafu a naopak z grafu odečíst a zapsat souřadnice bodů.

- *Atmosféra ve třídě, chování žáků*

První tři minuty mě překvapila opět konfrontační atmosféra, vyvolaná některými žáky. Ve třídě byl větší hluk. Nejvíce atmosféru ovlivňoval chlapec, na kterého jsem upozorňoval při předchozím náslechu. Po chvilce se však situace rázem zlepšila. Paní učitelka ze začátku hodiny více času věnovala rozebírání nevhodných reakcí žáků, v další části hodiny je spíše selektivně vybírala – na které reagovat a které ponechat bez povšimnutí. Pozitivní bylo, že i někteří žáci po chvilce sami začali reagovat na nevhodné chování spolužáka a atmosféra se velmi rychle přeměnila v pracovní.

- *Výklad*

V hodině se neobjevila opakovací část, učitelka rovnou přistoupila k výkladu nového tématu.

Učitelka: „Co vám říká soustava souřadnic?“

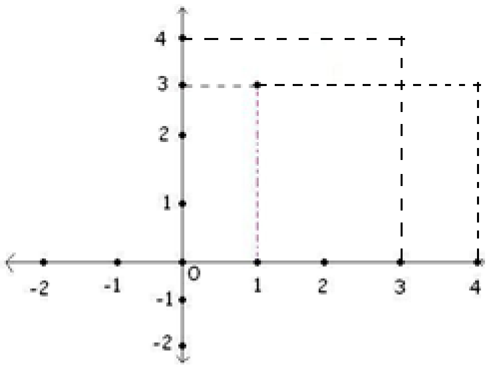
Žáci se vyjadřují ve smyslu, že nic takového neslyšeli. Učitelka načrtne na tabuli dvě navzájem kolmé přímky: „Tyto dvě přímky pomůžou popsat jakékoliv místo na tabuli.“

Dále zavádí v průsečíku obou os: „Toto je bod nula.“

Následně popíše vodorovnou osu – napravo od bodu „nula“ zapisuje kladná čísla, nalevo záporná. Podobně popíše i svislou osu. Žáci se ptají, jestli si mají kreslit, co vidí na tabuli. Učitelka jim umožňuje soustředit se na to, co se děje na tabuli, a že na zápis jim pak vyčlení určitý čas.

VLASTNÍ KOMENTÁŘ: *Objevuje se obecný problém, žáci musí dostat čas na pochopení. Na druhou stranu je to vždy o hledání kompromisu. Příliš mnoho času způsobuje u dětí nudu, nedostatek času na druhé straně nepochopení výkladu. Navíc zde hrají roli i individuální rozdíly mezi dětmi. Řešením může být zvolení vhodných výukových metod a forem.*

Učitelka: „Postavím se třeba sem, nebo sem, nebo sem, a pomocí čísel na ose chci toto místo zapsat. Například tady stojím na místě trojky a jedničky. Najděte mi bod, který stojí na místě čtyřky a trojky.“



Obr. 7.4

Žáci nejdříve navrhují první bod.

Učitelka: **„**Má někdo jiný nápad?“ Jiný žák uvádí druhé řešení, které zadání také splňuje.

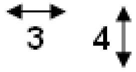
VLASTNÍ KOMENTÁŘ: *Pokud si máme jednoznačně rozumět, je třeba se dohodnout na pořadí, v jakém budou souřadnice uváděny. Na tento moment se dá opakovaně odkazovat v okamžicích, kdy žáci budou dělat chyby právě v záměně obou souřadnic. Důležité je, že tato potřeba vznikla u samotných žáků.*

Učitelka: „Jako první budeme říkat čísla, která jsou tady.“ Ukazuje na vodorovnou osu. „A jako druhé tady.“ Ukazuje na svislou osu.

Reakce žáka, který před chvílí uváděl první řešení: „Takže jsem to měl špatně.“

Reakce učitelky: „Ne, měl jsi to správně, v tu chvíli. Kdybys to ale řekl teď, tak už to správně nebude.“

Ještě jednou učitelka zdůrazňuje toto pravidlo jako dohodu a zmiňuje, že dohoda klidně mohla být opačná. Vše doprovází na tabuli i symbolickým zápisem:



Učitelka zadává: „Narýsujte si ty dvě osy a body: 2;–1, –3;2, 4;0 …“

Žáci, kteří mají hotovo, chodí postupně k tabuli a body zanášejí do grafu na tabuli. Na tabuli se objevují pouze náčrtky od ruky, v sešitě paní učitelka trvá na rýsování pomocí pravítka.

Jedna žákyně narazila na bod 4;0 a nevěděla, kam jej zanést.

Učitelka: „Tak zkus jiný bod.“

Další žák již bod s nulovou souřadnicí zanesl správně. Paní učitelka dala pauzu a upozornila všechny děti na obraz tohoto bodu a na jeho nulovou souřadnici.

VLASTNÍ KOMENTÁŘ: *Paní učitelka označuje tento problém za opakovaný. Opakuje se v každém ročníku, kdy žáci pracují se souřadnicemi bodů. Tomu, jak jej překonává, jsme se věnovali v rozhovoru B4.*

- *Práce s učebnicí* (Odvárko, Kadleček, s. 37):

Učitelka: „Popiš, jak obrázek vytvořili.“ V úloze nejsou již anonymní čísla, vystupují zde body přiřazující konkrétnímu dni naměřenou teplotu v určitých časech. Paní učitelka s vědomím tohoto nového kontextu dala dětem čas, aby si předchozí model spojily s touto konkrétní závislostí. Na druhou stranu v tento moment nedošlo k dostatečnému ověření, zda si žáci opravdu ztotožnili oba modely. Učitelka dále uvádí dohodnutý zápis do hranatých závorek. Dále přiřazuje jednotlivým osám písmenka: „Tohle je osa x a tohle je osa y.“

Společně řeší úlohu 1 na straně 39. Žáci mají zkontrolovat, zda body zapsané pomocí jejich souřadnic jsou také správně zaneseny v soustavě souřadnic. Většina žáků odpovídá správně. U jedné žákyně se objevuje stále nejistota, učitelka se snaží návodnými otázkami žákyni provést až k vyslovení správného závěru: „Jaké spojnice? V jakém pořadí je řekneš?“

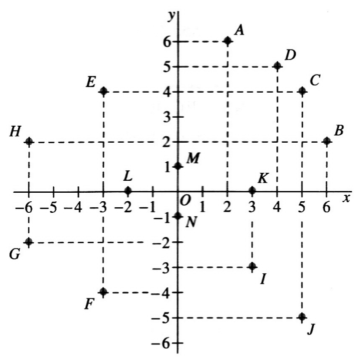
Reakce žákyně: „A bude na to písemka?“

VLASTNÍ KOMENTÁŘ: *Motivace žáků a její struktura jsou důležitým faktorem školní úspěšnosti.*

Společně se řeší i úloha 2 na straně 40. Zde má několik žáků problém s jejím pochopením. Ptal jsem se jedné žákyně a problematické místo spočívalo v přiložené tabulce (viz obr. 7.5).

2. Zapiš následující body pomocí jejich souřadnic v pravoúhlé soustavě souřadnic *Oxy*.

A	*A*	*B*	*E*	*F*	*J*	*K*	*N*
B	*C*	*D*	*G*	*H*	*I*	*L*	*M*



Obr. 7.5: (Odvárko, Kadleček, 1998, s. 40)

VLASTNÍ KOMENTÁŘ: *Stačilo by vynechat přiloženou tabulku a přeformulovat zadání například takto: Zapiš souřadnice bodů zobrazených v pravoúhlé soustavě souřadnic.*

Žákyni nebylo jasné, jaký je očekávaný zápis řešení, co je zobrazeno v tabulce. Jinak jsem si následně ověřil, že problém nebyl spojený s vlastním řešením. Žáci, když učitelka uvedla na tabuli vzorové řešení, ve kterém ignorovala uvedenou tabulku, najednou získali jistotu a všechny body již zapsali bez chyby.

V okamžiku, kdy žáci samostatně zapisují souřadnice bodů, učitelka se individuálně věnuje problémovému chlapci.

Učitelka bez komentáře nyní na tabuli načrtne tabulku:

	1	2	3	4
	3	6	9	12

Žáci bezprostředně komentují: „To je přímá.“

Učitelka: „Kdybyste to překreslili do grafu, co budou řádky?“

Žáci: „Ceny. Kusy.“

Učitelka: „A jak to bude vypadat?“

Žáci: „Kusy dolů, koruny tady nahoru.“

Učitelka načrtne graf a body podle instrukcí žáků zapisuje dohodnutým způsobem. Následně popisuje osy: k ose *x* připíše Ks, k ose *y* Kč.

Žáci: „A máme to spojit?“ Učitelka spojuje.

VLASTNÍ KOMENTÁŘ: *Až dodatečně jsme si s paní učitelkou uvědomili, že zde byla vhodná příležitost k seznámení se s modelem závislosti, jejímž grafem jsou izolované body a nikoliv spojitá čára. Stačilo konkretizovat kusy na jedné z os například na kusy pečiva. Zde se již v reálném zasazení nepředpokládá, že by se prodávalo pečivo jinak než na celé kusy a dostáváme zmíněný model grafu. Jedná se o vytvoření jednoho z izolovaných modelů, které v budoucnu mohou přispět k vybudování univerzálního modelu pojmu funkce. Nedostatek takovýchto modelů, s nimiž žáci přicházejí do styku, může vést ke vzniku formalizmu. Paní učitelka se věnovala rozlišování grafů tvořených spojitou čárou a izolovanými body na jedné z následujících hodin. Stručný popis nabízím v rozhovoru B4.*

- *Závěr*

Učitelka si uvědomuje individuální rozdíly mezi žáky a zároveň si uvědomuje, že většina třídy by nemusela přijmout jiné výukové formy a metody, na které nejsou zvyklí. Ty by sice mohly umožnit ve větší míře se věnovat žákům individuálně, na druhou stranu vidí rizika, která by to mohla přinést. Ta pravděpodobně plynou i z minulé zkušenosti (potvrzeno také při rozhovorech). Přesto paní učitelka, kdykoliv je příležitost, tak se věnuje právě žákům, u nichž předpokládá nepochopení výkladu.

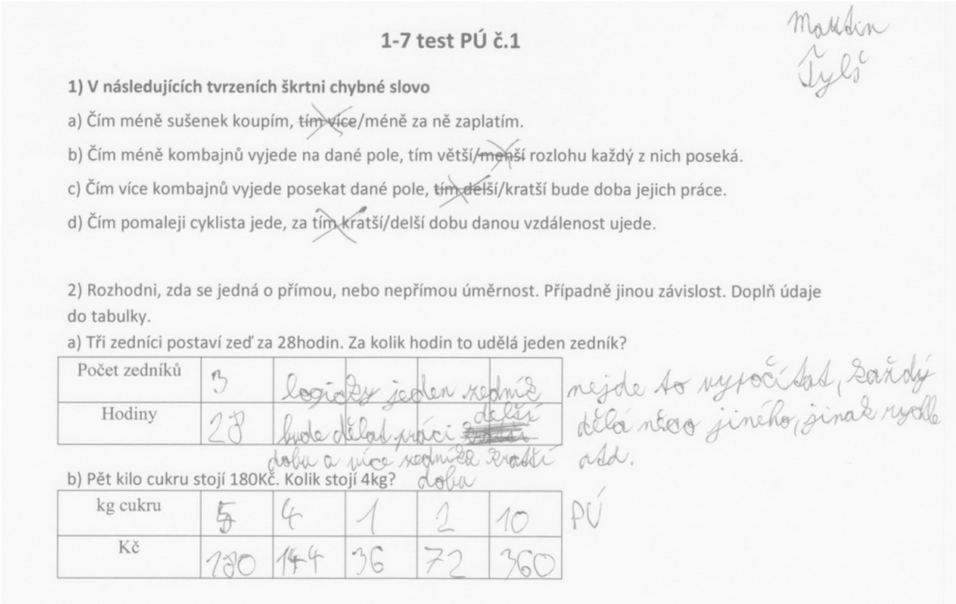
Na stylu výuky je vidět, že učitelka je k žákům empatická (nenechává bez povšimnutí nevhodné reakce jednoho žáka vůči druhému), žáky pozitivně motivuje (např. v okamžiku, kdy jeden žák označil svou odpověď dodatečně za chybnou, paní učitelka upozornila, že v předchozím kontextu jeho odpověď byla správná), umožňuje žákům zažívat úspěch (vyvolávání k tabuli na jednotlivosti, kde je předpoklad zvládnutí žákem; u žáků je patrné, že nemají obavu říkat odpovědi před celou třídou; pokud si s úlohou žák nevěděl u tabule rady, učitelka zadala jinou).

Při hodině se vyskytují jak momenty, kdy učitelka vede žáky otázkami k vyslovení závěrů (např.: „Popiš, jak obrázek vytvořili.“), ověřuje pochopení (žáci uvádějí či zapisují souřadnice zanesené v grafu a naopak zadané souřadnice zanášejí do grafu). Dává prostor pro pochopení, nevyžaduje současné opisování z tabule a vnímání výkladu. Při vlastní hodině nabízí dostatek příkladů k procvičování. Vede žáky k uvědomění si, že některé věci je dobré stanovit dohodou (pořadí zapisování souřadnic), že však nejsou logickou nutností. Překonává vzniklé problémy žáků (např. problém s body o jedné souřadnici rovné nule).

7.4.3 Písemný test v období mezi náslechy BN2 a BN3

Vybrané práce z testu (viz obr. 7.6 – 7.8) jsem podrobil rozboru. Rozboru chyb jsme se s paní učitelkou věnovali také při závěrečném rozhovoru. Úlohu 1 všichni žáci, kteří psali test, řešili správně. U tvrzení 1b) si paní učitelka vybavila problém, který se zadáním i v minulosti žáci měli. Ti chápali práci kombajnů jako časově omezenou, a tudíž neviděli žádnou závislost rozlohy na počtu kombajnů. U úlohy 2a) paní učitelka dodatečně upřesnila, že původně zadanou hodnotu 28 hodin na začátku testu změnila na 27 hodin.

U úlohy 2a) na obrázku 7.6 nejprve žák napsal komentář, ve kterém zdůvodňuje, proč se tabulka vyplnit nedá: „Nejde vyplnit, každý dělá něco jiného, jinak rychle, atd.“ Problém souvisel s jistou idealizací přítomnou v textu slovní úlohy, která pro žáka byla překážkou pro následné početní řešení. Paní učitelka na náslechu BN1 z 5. 2. 2013 na toto upozorňovala u jedné z úvodních úloh na nepřímou úměrnost. Při následném rozhovoru mi potvrdila, že s tím někteří žáci problém mít mohou a že je nutné na tuto idealizaci občas upozornit. Paní učitelka si této odpovědi všimla při psaní testu a žáka vyzvala, aby alespoň popsal, o jaký typ závislosti se jedná. Doplněná odpověď žáka: „Logicky jeden zedník bude dělat práci delší dobu a více zedníků kratší dobu.“



1-7 test PÚ č.1

1) V následujících tvrzeních škrtni chybné slovo

a) Čím méně sušenek koupím, ~~tím více~~/méně za ně zaplatím.

b) Čím méně kombajnů vyjede na dané pole, tím větší/~~menší~~ rozlohu každý z nich poseká.

c) Čím více kombajnů vyjede posekat dané pole, ~~tím delší~~/kratší bude doba jejich práce.

d) Čím pomaleji cyklista jede, za ~~tím kratší~~/delší dobu danou vzdálenost ujede.

2) Rozhodni, zda se jedná o přímou, nebo nepřímou úměrnost. Případně jinou závislost. Doplň údaje do tabulky.

a) Tři zedníci postaví zeď za 28hodin. Za kolik hodin to udělá jeden zedník?

Počet zedníků	3	logicky jeden zedník
Hodiny	28	bude dělat práci delší

doba a více zedníků kratší doba

nejde to vypočítat, každý dělá něco jiného, jinak rychle atd.

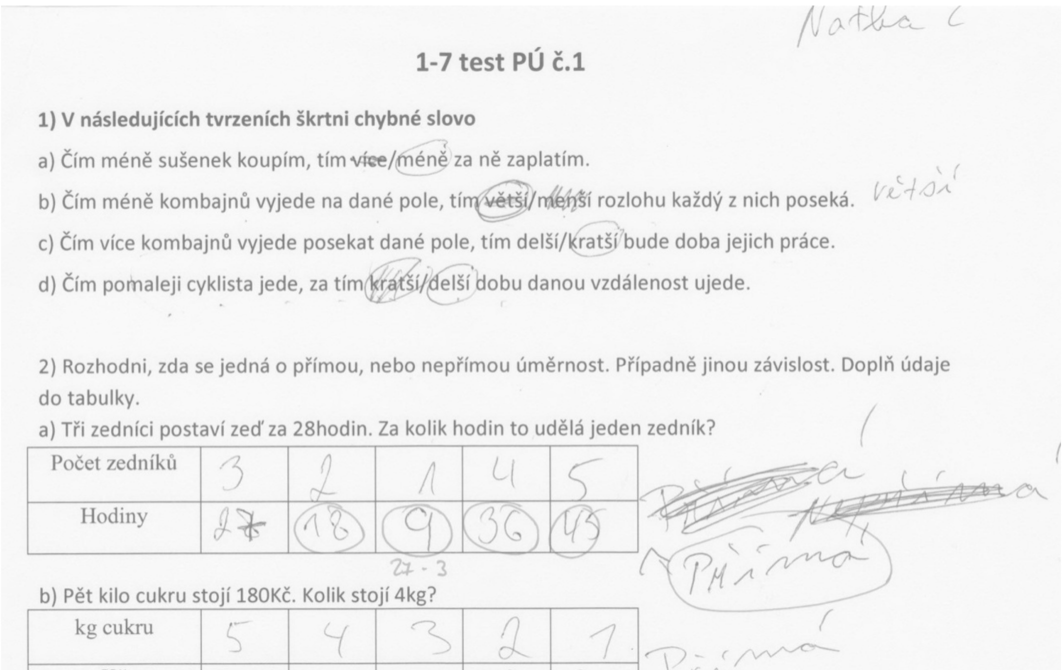
b) Pět kilo cukru stojí 180Kč. Kolik stojí 4kg?

kg cukru	5	4	1	2	10
Kč	180	144	36	72	360

PÚ

Obr. 7.6

U testu druhého žáka (viz obrázek 7.7) došlo k chybnému určení typu závislosti u nepřímé úměrnosti. Naznačený výpočet 27 krát 3 je doplněn až učitelkou. Zajímavé je, jak žák původní volbu opakovaně mění. Chyby v tomto testu učitelka připisuje především tomu, že si žák nevěří. Druhou závislost, přímou úměrnost, určil správně. Po rozhodnutí, o jaký typ závislosti se jedná, žák již tabulku pro zvolený typ závislosti vyplňuje správným způsobem.



1-7 test PÚ č.1

1) V následujících tvrzeních škrtni chybné slovo

a) Čím méně sušenek koupím, tím ~~více~~/méně za ně zaplatím.

b) Čím méně kombajnů vyjede na dané pole, tím větší/~~menší~~ rozlohu každý z nich poseká. větší

c) Čím více kombajnů vyjede posekat dané pole, tím delší/kratší bude doba jejich práce.

d) Čím pomaleji cyklista jede, za tím kratší/delší dobu danou vzdálenost ujede.

2) Rozhodni, zda se jedná o přímou, nebo nepřímou úměrnost. Případně jinou závislost. Doplň údaje do tabulky.

a) Tři zedníci postaví zeď za 28hodin. Za kolik hodin to udělá jeden zedník?

Počet zedníků	3	2	1	4	5
Hodiny	27	18	9	36	45

27 · 3

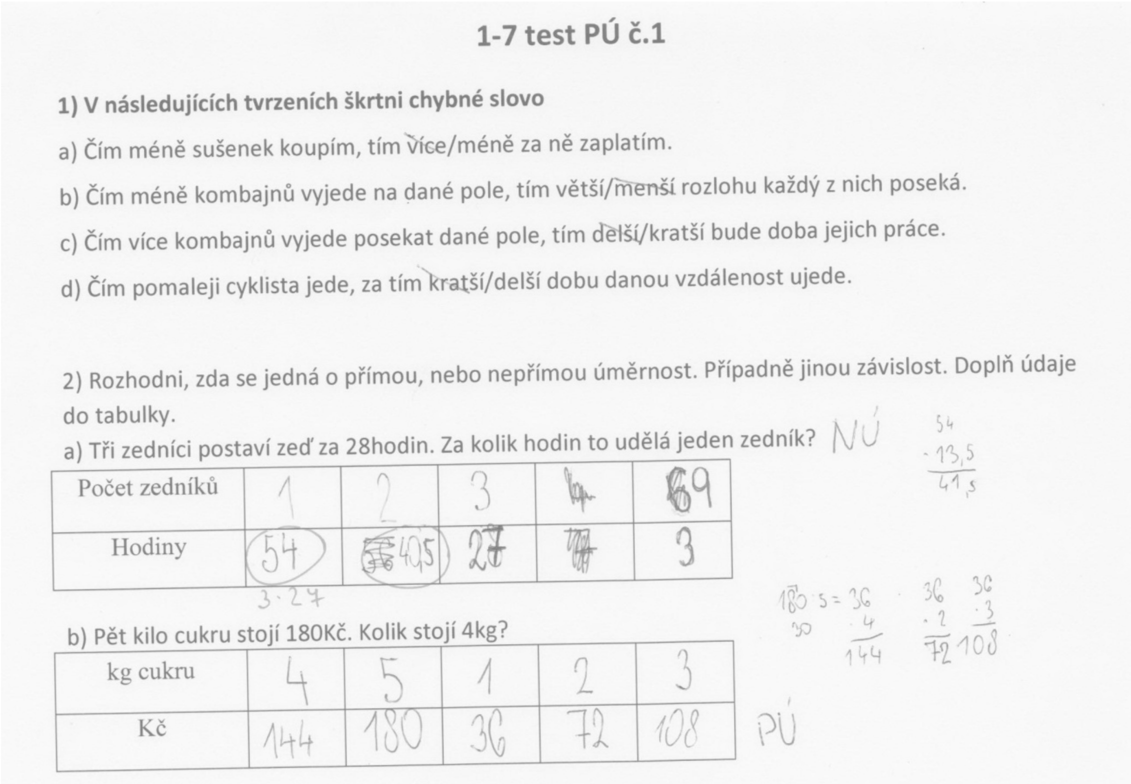
Přímá

b) Pět kilo cukru stojí 180Kč. Kolik stojí 4kg?

kg cukru	5	4	3	2	1
Kč	180	144	108	72	36

Přímá

Obr. 7.7



1-7 test PÚ č.1

1) V následujících tvrzeních škrtni chybné slovo

a) Čím méně sušenek koupím, tím ~~více~~/méně za ně zaplatím.

b) Čím méně kombajnů vyjede na dané pole, tím větší/~~menší~~ rozlohu každý z nich poseká.

c) Čím více kombajnů vyjede posekat dané pole, tím ~~delší~~/kratší bude doba jejich práce.

d) Čím pomaleji cyklista jede, za tím ~~kratší~~/delší dobu danou vzdálenost ujede.

2) Rozhodni, zda se jedná o přímou, nebo nepřímou úměrnost. Případně jinou závislost. Doplň údaje do tabulky.

a) Tři zedníci postaví zeď za 28hodin. Za kolik hodin to udělá jeden zedník? NÚ

Počet zedníků	1	2	3	4	69
Hodiny	54	40,5	27	[illegible]	3

3 · 27

54 − 13,5 = 41,5

b) Pět kilo cukru stojí 180Kč. Kolik stojí 4kg?

kg cukru	4	5	1	2	3
Kč	144	180	36	72	108

PÚ

180 : 5 = 36

36 · 4 = 144

36 · 2 = 72

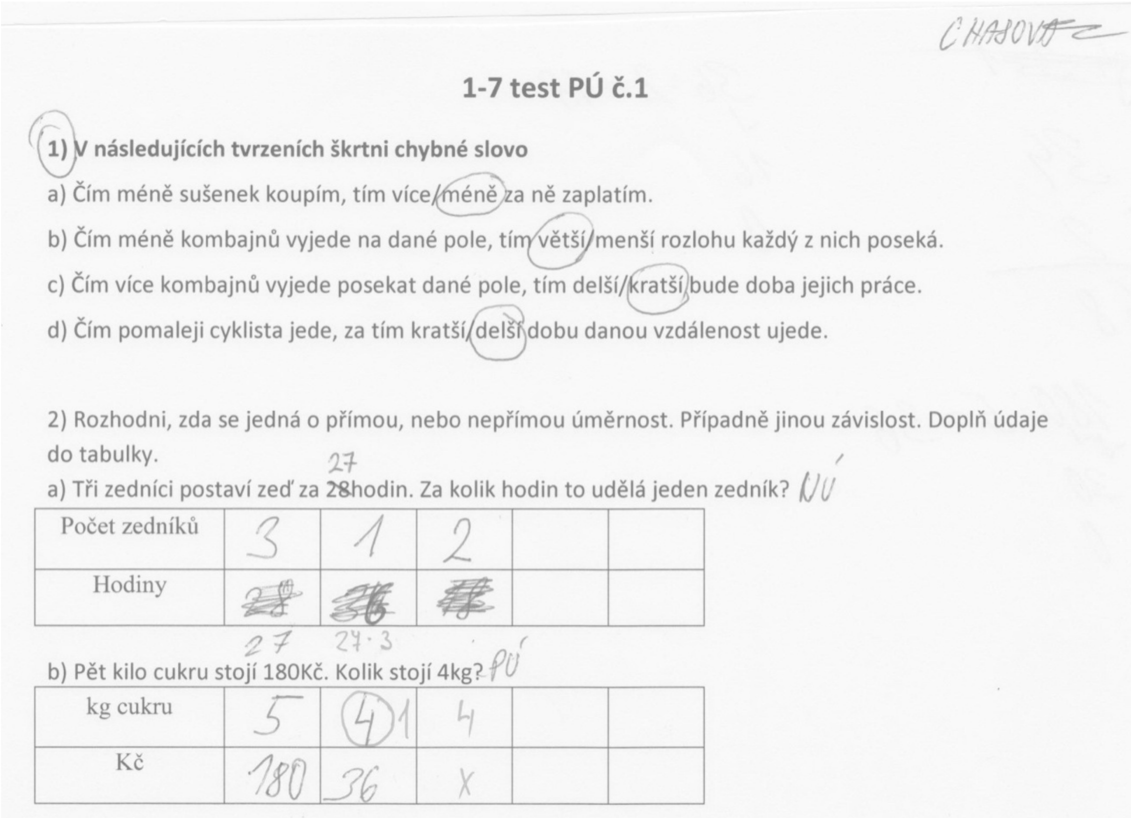
36 · 3 = 108

Obr. 7.8

V třetí žákovské práci (viz obrázek 7.8) jsou správně určeny druhy závislostí. U přímé úměrnosti je bezchybně vyplněná tabulka. Správný postup je potvrzen i pomocnými výpočty. U nepřímé úměrnosti se žákyně na začátku dopustila chybného kroku, místo aby počet hodin u třech dělníků třikrát zvětšila, tak jej zvětšuje dvakrát. Naznačený výpočet 3 krát 27 je dopsán učitelkou. Chybí dovednost v práci s tabulkou nepřímé úměrnosti.

Učitelka charakterizuje tuto žákyni takto: „Jde o šikovnou holku, která si v přímé úměrnosti je jistá, v nepřímé hledala zádrhele. Myslím si, že 54 vzniklo tím, že 3 – 1 = 2, a proto hledá dvojnásobek pro jednoho zedníka, a pak pro dva hledá střed (54 – 13,5). Myslím, že teď už takovou chybu neudělá."

Čtvrtá žákyně (viz obrázek 7.9) správně určuje druhy závislostí. U nepřímé úměrnosti nedokáže vyplnit tabulku. Výpočet 27 krát 3 je opravou učitelky. U tabulky přímé úměrnosti zakroužkovaná čtyřka je zápisem žákyně, který je opraven učitelkou na jedničku. Následný zápis třetího sloupečku je principiálně správný, nicméně žákyně uvedené *x* ani další prázdná pole tabulky nevyplní. Žákyně si na základě otázky v zadání zapsala nejprve čtyřku. V dalším kroku určila správně cenu za 1 kg, tu však již zapisuje nesprávně pod 4 kg v tabulce.


CHAJOVÁ

1-7 test PÚ č.1

1) V následujících tvrzeních škrtni chybné slovo

a) Čím méně sušenek koupím, tím více/méně za ně zaplatím.

b) Čím méně kombajnů vyjede na dané pole, tím větší/menší rozlohu každý z nich poseká.

c) Čím více kombajnů vyjede posekat dané pole, tím delší/kratší bude doba jejich práce.

d) Čím pomaleji cyklista jede, za tím kratší/delší dobu danou vzdálenost ujede.

2) Rozhodni, zda se jedná o přímou, nebo nepřímou úměrnost. Případně jinou závislost. Doplň údaje do tabulky.

a) Tři zedníci postaví zeď za ~~28~~ 27 hodin. Za kolik hodin to udělá jeden zedník? NÚ

Počet zedníků	3	1	2		
Hodiny	~~28~~ 27	~~36~~ 27·3	[illegible]		

b) Pět kilo cukru stojí 180Kč. Kolik stojí 4kg? PÚ

kg cukru	5	4 1	4		
Kč	180	36	x		

Obr. 7.9

Komentář učitelky: „Tahle holka jede hodně podle naučených schémat, a pokud jí kousek cesty nesedí, už se nechytne. A to se podle mě stalo, má naučené, že zedníci = nepřímá úměrnost, kusy = přímá úměrnost, doplnění tabulky má také naučené, ale jestli tam má napsat jeden kus nebo čtyři už si nepamatuje.“

7.4.4 Pozorování – náslech BN3

Na třetí náslech jsem zařadil strukturované pozorování zaměřené na výskyt metod a forem v dané vyučovací hodině. K záznamu jsem použil hospitační arch. Současně jsem pozoroval podobné momenty, na které jsem se soustředil již na předchozích násleších. Vzhledem k tomu, že má pozornost coby pozorovatele byla soustředěná na více jevů, pořídil jsem z vyučovací hodiny též audio záznam. S ním jsem následně konfrontoval své poznámky.

Cílem vyučovací hodiny bylo procvičování trojčlenky. S touto metodou byli žáci již seznámeni na předchozí hodině. Na vyučování bylo přítomno pouze devět žáků. To se mimo jiné projevilo na příjemné pracovní atmosféře, která byla bez rušivých okamžiků spojených s řešením kázeňských problémů. Tím byly vytvořeny i podmínky pro individuálnější přístup během výuky.

Na začátku hodiny dochází ke kontrole domácích úkolů. Zajímavé je, že paní učitelka kontrolu provádí tak, že se od katedry ptá, zda žáci úkol mají či nikoliv. Nedochází přímo ke kontrole splnění úkolů v sešitě, paní učitelce stačí vyjádření žáků.

VLASTNÍ KOMENTÁŘ: *Myslím, že je to důležitý prvek vztahu učitelky k žákům, se kterým, pokud se dlouhodobě pracuje, může učitelce ušetřit čas. Zároveň takto budovaná důvěra se může zúročit i v dalších situacích.*

Vzhledem k tomu, že jedna žákyně prohlásila, že úkolu nerozuměla, dochází ke kontrole řešení na tabuli. Jedná se o cvičení 3a) na straně 28 z pracovního sešitu (Rosecká, Čuhajová, Nová škola): *Na vymalování 24 m^2 stěn je třeba 2,5 kg barvy. Kolik m^2 se může vymalovat 6 kg barvy?*

Učitelka: „První, co budeme muset rozhodnout, je, jestli je to přímá nebo nepřímá úměrnost."

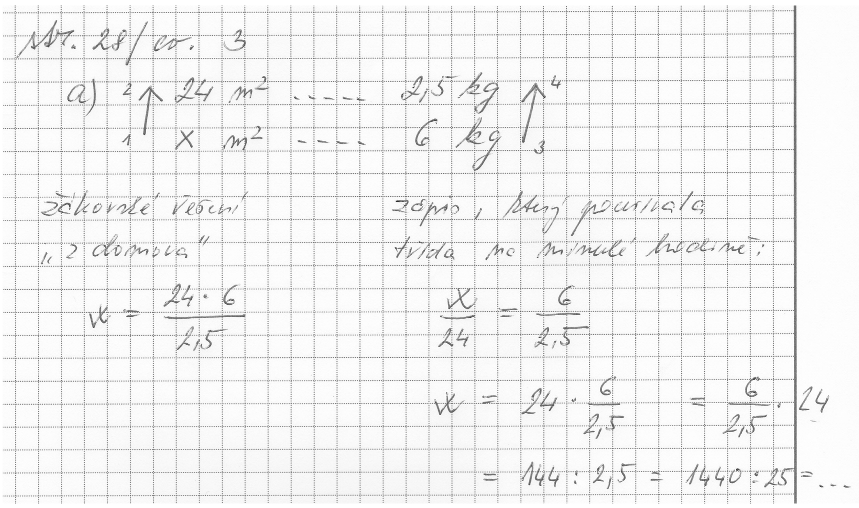
Jeden z žáků spontánně nabízí odpověď: „Přímá."

Učitelka se ptá, proč si to myslí. Ze třídy se ozývají odpovědi: „Čím víc metrů, tím víc kilo barev."

Paní učitelka ještě zopakuje odpověď. Ostatní žáci mají příležitost se nad odpovědí zamyslet.

Učitelka přečte otázku a vyžaduje od žáků její přetlumočení: „Na co se mě tam ptají?"

Zapisuje na tabuli – viz obrázek 7.10.



Obr. 7.10: Kopie poznámek pořízených na náslechu.

K tabuli se vydá jedna žákyně a zápis doplňuje o šipky, se kterými se pracovalo na minulé hodině a o jakási čísla u šipek. Paní učitelka se ptá na význam pomocných čísel u šipek.

Žákyně: „Je to pořadí, v jakém to jde za sebou." Jak dále využívá toto číslování, již nerozvádí, rovnou vyjadřuje neznámou *x*.

Paní učitelka její zápis ponechává na tabuli a ptá se žáků: „Je to stejné jako to, co jsme sestavili včera?"

Žáci: „Ne." Jeden z žáků zapíše na tabuli rovnici.

Během vyučování je zajímavé sledovat, jak většina žáků, když jim je cokoliv nejasného, neváhají a učitelku na nejasnost upozorní. Takové dotazy nejsou doprovázeny žádnou posměšnou reakcí ze strany spolužáků. Klima třídy se jeví v tomto jako velmi zdravé a podporující. Zde např. paní učitelka zapisovala rovnici zprava doleva a jeden z žáků se nad tím pozastavuje: „Paní učitelko, a proč se to píše pozpátku?“

Učitelka vysvětlí, že chtěla, aby to odpovídalo předchozímu zápisu a zároveň respektovala, v jakém pořadí jí to diktovali žáci.

Žákyně: „A to moje je tedy dobře?“

Učitelka: „No to musíme zjistit. My jsme si řekli, že dvacet čtyřkou násobíme šest lomeno dva a půl. Je to stejné?“

Žáci nejsou jednotní, někteří říkají, je to totéž, někteří, že to není totéž. Paní učitelka se ptá žákyně, která přišla se svým zápisem, co ona si myslí. Ta se odkazuje na to, jak jí to doma učili, a svůj postup není schopná (nebo nechce) obhájit. Je patrné, že pouze čeká, až se dozví, jestli její postup je správný. Paní učitelka následně ukazuje, že oba zápisy jsou ekvivalentní. Učitelka si ověřuje u jednotlivých žáků, jestli chápou jak zápis spolužákyně, tak ekvivalentnost obou zápisů na tabuli. Někteří žáci si nejsou jistí postupem dělení, paní učitelka postup připomene na tabuli. Sami žáci cítí potřebu doplnit si tuto neznalost a postup si někteří se spolužákem oživují. Zaznívá poznámka na nedávnou Pythagoriádu, zda bude známkovaná.

VLASTNÍ KOMETÁŘ: *U některých žáků je pravděpodobně silně vyvinutá vnější motivace spojená se známkami. Podobné obavy žáků jsem zaznamenal i na předchozím náslechu.*

Nyní se začíná učitelka věnovat cvičení 3b) na straně 28 z pracovního sešitu (Rosecká, Čuhajová, Nová škola): *Kolik barvy je třeba na vymalování stěn o ploše 60 m^2?*

Na začátku učitelka společně s žáky přemýšlejí nad typem závislosti. Učitelka nedává zatím odpověď. Provede zápis bez šipek na tabuli a vyzve jednoho z žáků k tabuli. Žák si neví rady, paní učitelka nabízí, ať si vyslechne postup žákyně, která přišla se svým řešením z domova, a následně i žákyně, u které předpokládá osvojení postupu z minulé hodiny. V této pasáži si žáci spontánně vysvětlují svá řešení. Někteří žáci se vyjadřují ve smyslu „mně tento způsob řešení nevyhovuje“.

Učitelka na to: „Každý to dělá jinak, tak se drž svého způsobu.“

Dále se věnuje řešení úlohy na tabuli směrem k celé třídě.

Komentuje zápis žáka na tabuli: „Martin zapsal rovnici …“

Martin: „To je rovnice?“

VLASTNÍ KOMENTÁŘ: Pravděpodobně nemá ještě osvojený pojem rovnice. *Nicméně to, že se nebojí takto ptát, je jeden z předpokladů k tomu, aby si v budoucnu podobné modely dotvářel a upřesňoval.*

Učitelka shrnuje: „Patricie má svůj systém, který vede k cíli, tady máte další systém, který vede k cíli, a obojí je dobře.“

Dále si učitelka ověřuje, zda jsou jednotlivým žákům tyto postupy jasné. Zadává domácí úkol.

Pozornost obrací na straně 33 ke cvičení 1 (Rosecká, Čuhajová, Nová škola):

Tanker naplněný olejem se vyprázdní za 2 hodiny, když pracuje 5 pump. Za jak dlouho se tanker vyprázdní, když jedena pumpa bude mimo provoz pro poruchu?

Učitelka zapisuje na tabuli a ptá se žáků na typ úměrnosti a vyžaduje zdůvodnění odpovědi.

Žáci: „Protože čím víc pump, tím míň hodin.“

Učitelka opět nabízí dostatek času. Dále si ověřuje u žáků, u nichž očekává problém s pochopením, zda určování typu závislosti rozumí. Žákyně si stále není jistá, učitelka žádá sousedku v lavici, aby jí to vysvětlila, a věnuje se řešení směrem k ostatním dětem. Ptá se na směry šipek. Žáci určují. Sama zapisuje rovnici a následně řeší na tabuli. Výsledkem je 2,5 hodiny. Žákyně upozorňuje na možnou chybnou interpretaci výsledku jejími spolužáky: „2,50 hodiny nejsou dvě hodiny a 50 minut.“ Učitelka rozvíjí tuto poznámku a ověřuje si na podobných příkladech pochopení dalšími žáky.

Následuje další cvičení – na straně 35 cvičení 3 (Rosecká, Čuhajová, Nová škola):

Hospodář má zásobu zrní pro 24 slepic na 5 měsíců. Na jak dlouho mu zásoba zrní vystačí, když 4 slepice vymění se sousedem za psa?

Úlohu řeší žákyně u tabule, učitelka se během řešení dotazuje na to, jak uvažovala při určení typu úměrnosti. Ještě než to žákyně vysvětlí, ozve se ze třídy: „Jak to, že je to nepřímá?“ Vysvětlení se již ujímá učitelka – „čím víc …, tím míň …“

Žákyně řeší na tabuli, žáci souběžně každý sám do sešitu. Učitelka do toho nevstupuje, věnuje se individuálně vybrané žákyni. Ostatní řeší, zároveň komunikují se spolužáky. Veškerá komunikace ve třídě se týká řešené úlohy. Učitelka kontroluje řešení na tabuli.

Zajímavé také je, že nikdo ze třídy se během hodiny nevyjadřuje ve smyslu nepochopení zadání. V posledních dvou úlohách není vyloženě zadáno, kolik je zde slepic, resp. pump. Zadání pracuje s určitou gradací, kterou žáci nevnímají jako překážku pro správný zápis.

Následuje cvičení 4 na straně 35 (Rosecká, Čuhajová, Nová škola):

Dvacet zrnek hrachu váží průměrně 5 gramů. Kolik zrnek je přibližně v pytli, ve kterém je 40 g hrachu?

Probíhá diskuse nad určením druhu úměrnosti. Přichází výzva ke konkrétní žákyni na zdůvodnění odpovědi. Učitelka se ptá na nutnost převedení jednotek. Žáci ji potvrzují. Učitelka vytvoří rovnici.

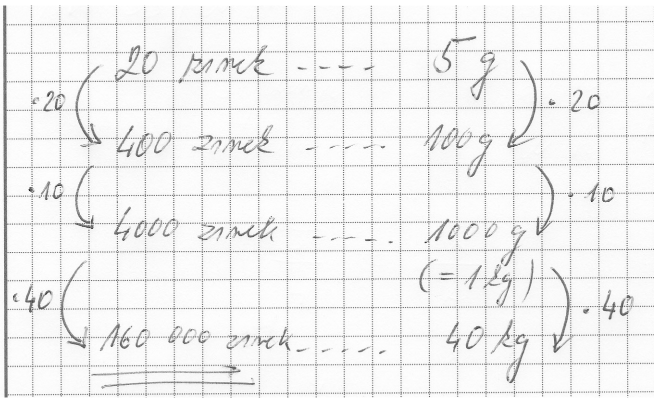
Ptá se: „Počítal to někdo jinak, než vidíš na tabuli?“

Opět se rozvíjí diskuse nad ekvivalentností různých zápisů.

Učitelka: „Já se teď zeptám, jestli jste na všechno, co jsme zde řešili, nasadili trojčlenku. Ještě před tím, než jsme poznali trojčlenku, tak jsme ty úlohy řešili bez šipek. Jak jsme je řešili?“

Žáci: „Jednodušeji, bez šipek.“ Jiní žáci: „Tohle je jednodušší.“

Učitelka konstatuje, že všechny způsoby jsou použitelné, nechává na nich, který si vyberou.
Učitelka: „Jde o to, abyste trénovali mozek a podívali se na řešení z jiné stránky, než vám je blízké.“
Opět společně s žáky si připomínají starší způsoby a srovnávají způsob zápisu s řešením dnešních úloh. Blíží se konec hodiny. Dostavuje se již pozorovatelná nesoustředěnost některých žáků.
Učitelka pracuje s přeformulováním předchozí úlohy: „20 zrnek váží 5 gramů. Kolik váží 160 000 zrnek?“
Rychlá žákovská odpověď: „40 kilo.“ váhavá žákovská odpověď: „20?“
Učitelka: „Nevím, zkuste tuto úlohu vypočítat jinak než trojčlenkou.“
Okamžitě se ozývá chlapec (Martin), který evidentně, jakmile byla otázka položená, pracoval na svém řešení a trojčlenku jako postup řešení zde nepoužil, a to ještě před tím, než učitelka řekla, že se mají řešení pomocí trojčlenky vyhnout. I později prohlásil, že trojčlenku jako postup řešení nepřijal, nevyhovuje mu. Popisuje své řešení, které ale připadá ostatním nesrozumitelné. Učitelka následně jeho úvahu schematizuje a zapisuje na tabuli – viz obrázek 7.11.



Obr. 7.11: Kopie poznámek pořízených na náslechu.

Ostatní žáci se ptají na jednotlivé kroky: „A proč?“
Učitelka při zápisu upozorňuje na opakující se princip přímé úměrnosti. Dále vyzývá k zápisu předchozí úlohy do tabulky. Zápis provádí sama, komunikuje již s menším počtem žáků. Pravděpodobně je tato fáze již na některé žáky příliš rychlá. Zvonění. Ohlášení testu. S paní učitelkou jsem dohodnutý, že mi vybrané testy okopíruje a předá.

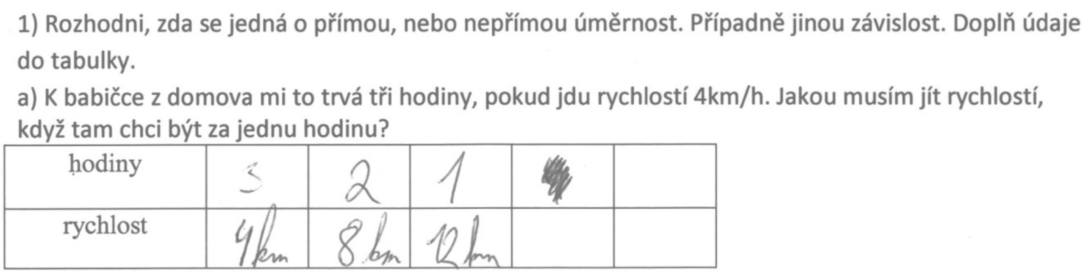
- *Závěr*

V hodině byla po většinu času pracovní atmosféra, klima třídy se jeví jako vzájemně podporující. Učitelka nabízí dostatek příkladů (izolovaných modelů), kterými se postupně buduje jasnější představa obou závislostí. Učitelka si uvědomuje individuální rozdíly mezi žáky a tomu přizpůsobuje své působení během vyučování – potvrzuje si opakovaně pochopení úloh, vyvolává selektivně žáky, u nichž předpokládá problémy, ve vhodných okamžicích se vybraným žákům věnuje individuálně. Využívá znalosti osobnosti žáků a nabízí různé strategie řešení úloh. Pracuje jak s žákovskými řešeními, tak s řešeními nabízenými v učebnici. Věnuje se i problémům, které v průběhu hodiny u některých žáků vyvstanou a nevztahují se k aktuálnímu učivu (např. dělení dvojciferným číslem, převádění z hodin na minuty, komutativnost násobení). Z hospitačního archu vybírám metody, které se během vyučovací hodiny vyskytly: vysvětlování (výklad) učitelky, diskuse, práce s textem, hromadná frontální výuka, partnerská výuka, samostatná práce a individualizovaná výuka.

7.4.5 Písemný test v období po náslechu BN3

Na základě osmi žákovských testů jsem sestavil seznam chyb, kterých se žáci v testu dopouštěli. Vzhledem k malému počtu prací jsem upustil od jejich kvantitativního vyhodnocení. Uvádím pouze výčet chyb bez informací o jejich četnosti:

- Chybuje při určení přímé úměrnosti.
- Chybuje při určení nepřímé úměrnosti.
- Neurčí druh závislosti.
- Vypočítá pouze jednu hodnotu v tabulce, ostatní sloupce nevyplňuje.
- Vypočítá pouze jednu hodnotu v tabulce, ostatní sloupce vyplní chybně.
- U nepřímé úměrnosti určí správně hodnotu pro jednotkovou proměnnou, další hodnotu však určuje ze dvou známých hodnot jako jejich průměr. Neuvědomuje si nelineární charakter závislosti (viz obrázek 7.12).


1) Rozhodni, zda se jedná o přímou, nebo nepřímou úměrnost. Případně jinou závislost. Doplň údaje do tabulky.
a) K babičce z domova mi to trvá tři hodiny, pokud jdu rychlostí 4km/h. Jakou musím jít rychlostí, když tam chci být za jednu hodinu?

hodiny	3	2	1		
rychlost	4km	8 km	12 km		

Obr. 7.12

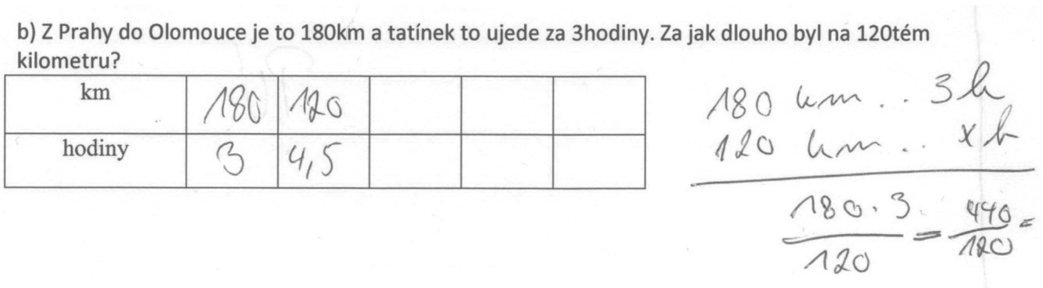
Zde by v rámci práce s chybou bylo možné odkázat například na graf nepřímé úměrnosti. Odkazuji také na poznámku paní učitelky v rozhovoru B4: „Tam je asi důležité, že se dostáváš po těch schodech. U té nepřímé nejdeš po stejně vysokých schodech.“

- Při konstrukci grafu nevolí pro jednu a tu samou diferenci stejně velké dílky.

Dále uvádím postřehy o strategiích řešení úloh.

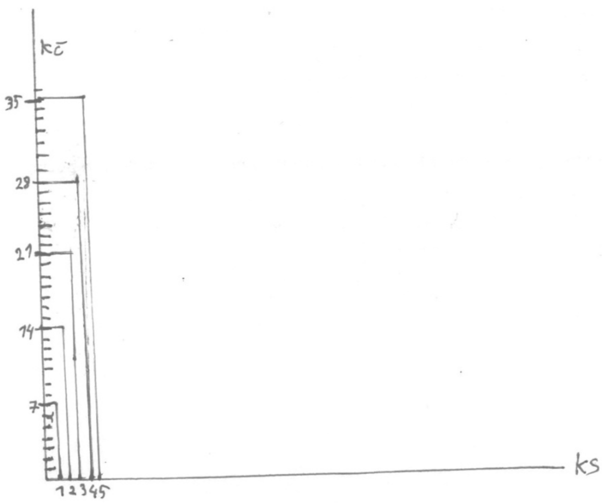
- Někteří žáci volí do tabulky „hezká čísla“, to je taková, aby z nich následným výpočtem získali druhou proměnnou jako celé číslo.

– Jiní žáci při volbě nezávisle proměnné neuvažují směrem k „hezkému výsledku“ závisle proměnné.
– Někteří žáci, přestože zadání směřuje k řešení úloh pomocí tabulky, využívají jako strategii řešení trojčlenku (viz obrázek 7.13).
– Někteří žáci po chybném určení typu závislosti pracují s tabulkou již správným způsobem.



Obr. 7.13

– Při konstrukci grafu volí nevhodně stejné měřítko na obou osách. (viz obrázek 7.14)



Obr. 7.14

7.5 Rozhovory C1 – C2, učitelka JS, ZŠ Praha

V případě rozhovoru C1 se jednalo o úvodní rozhovor, který těsně předcházel náslechu na hodině. V té době paní učitelka měla téma nepřímé úměrnosti již probrané, plánovala jej pouze zopakovat a následně zařadit do pololetní písemné práce. Rozhovor proběhl 4. 6. 2013. Jeho analýzou jsem získal data, která jsou zanesená v tabulkách v příloze Y3. Z analýzy vyplynula následující zjištění:

- Nejvyšší četnost byla zjištěna u kategorií Podmínky pro práci učitele – vnější (celková četnost 12.
- Střední četnost byla zjištěna v kategoriích Osoba učitele (celková četnost 9; vyšší četnost zaznamenána v podkategorii pojetí učení – 8) a Učební materiály (celková četnost 9 s relativně rovnoměrným rozložením do podkategorií Učebnice, Vlastní materiály učitele a Názorné pomůcky).
- Nižší četnost byla spojená s kategoriemi Motivace žáků (5) a Kritická místa – obecně matematická (6).

V rozhovoru C1 byla zmíněna konkrétně tato Obecně matematická kritická místa:

- Chybějící představa krychlových jednotek objemu
- Chybějící numerické dovednosti, což se promítá do dalších oblastí matematiky
- Symbolický zápis postupu konstrukce
- Základní konstrukční dovednosti – rýsování kolmic, rovnoběžek

Někde byly naznačeny způsoby jejich překonávání:

- Důraz na názornost
- Odkazování na zkušenost s běžným životem
- Dostatek času na opakování a procvičování

Rozhovor C2 těsně navázal na náslech na hodině u paní učitelky JS. Z analýzy rozhovoru (viz příloha Y3) vyplynula následující zjištění:

- Nejvyšší četnost byla zjištěna u kategorie Kritická místa (celková četnost 16 s relativně rovnoměrným rozdělením mezi podkategorie Obecně matematická, Nepřímá úměrnost a Příbuzná témata NÚ).
- Druhá nejvyšší četnost byla zjištěna u kategorie Reprezentace, postupy (celková četnost 11 s rovnoměrným rozložením četností mezi podkategorie Tabulka, Rovnice, koeficient a Trojčlenka a s jedním výskytem u podkategorie Kolikrát víc, tolikrát míň).
- Střední četnost se týkala kategorie Osoba učitele – pojetí učení (četnost 7)
- Nízká četnost byla zjištěna u kategorie Učební materiály (četnost 3) a minimálně byly zastoupeny kategorie Podmínky pro práci učitele, Zpětná vazba, Ne-modely a Návaznost.

V rozhovoru C2 byla zmíněna tato Kritická místa:

- Větší opora ve zkušenosti žáků u přímé úměrnosti oproti nepřímé úměrnosti.
- Používání poučky „Čím víc, tím míň“ místo „Kolikrát víc, tolikrát míň“.
- Práce s desetinnými čísly a zlomky.
- Čtenářská gramotnost.
- Nalezení závislých veličin v textu.
- Nadbytečné informace v zadání úloh.

- Problém s odhadem veličin a s představou velikosti jednotek.

U některých Kritických míst byly zmíněny způsoby jejich překonávání:

- Důraz na přesnost formulací až v určité fázi osvojení znalosti.
- Odkazování na zkušenost z běžného života.
- Množství různých příkladů – modelů při budování pojmů.
- Vhodné didaktické pomůcky, názornost.

Kategorie/podkategorie	Citace
Podmínky pro práci učitele/vnější	*6 (C1) – „Taková ta svoboda pro učitele je samozřejmě správná myšlenka, ale myslím, že ti schopní si tu výuku dokázali rozvrhnout, naplánovat a celkově pojmout i bez existence RVP. Mám pocit, že to může být problém i pro začínající kantory. Ti potřebují nějakou oporu, jistotu a to volnost ze začátku praxe může paradoxně spíše svazovat.“*
Motivace žáků/vnější Podmínky pro práci učitele/vnější	*14 (C1) – „Ty děti odcházejí na gymnázia a pracuješ s tím, co zůstává … A co to přináší základkám? Chybějí tu tahouni třídy a ty potřebuješ. Ty děti pokud nemají někoho, kdo jim ukáže, že to lze, že se mohou zlepšovat, stagnují.“*
Učební materiály/ učebnice, vlastní materiály/ hodnocení	*31 (C2) – „Myslím, že to není ani didakticky až tak dobře zpracovaný. Jsou tam velký skoky a chybí mi tam spíše ta střední obtížnost. Ale na procvičení těch základů to většinou stačí. Já si to pak doplňuji svými věcmi.“*
Učební materiály/ učebnice/funkce	*26 (C1) – „No já myslím, že děti, alespoň na té základce, tu knížku, když už používají, tak musí být někdo nad nimi. Ve škole je to učitel a doma ten rodič. Oni si to sami neotevřou. Tam bych se přimlouvala opravdu za jednoduché poučky, pravidla a hodně to dohánět ve cvičeních.“*
Kritická místa/ obecně matematická	*34 (C1) – „Oni nemají moc představu, jak to je velký. Podle mě si to potřebují osahat, jinak to pro ně bude pořád něco abstraktního. Ale ten objem naštěstí všude kolem máš. Když si jdou koupit litr Coly po padesátý, tak tu představu získají.“*
Osoba učitele/ pojetí učení Reprezentace, postupy/ rovnice, koeficient tabulka/hodnocení	*6 (C2) – „Ono to není až tak těžké (přes koeficient úměrnosti), když to mají zažité a dostatečně procvičené. Já na tom hodně stavím. Mně to přijde takové univerzální. Dřív jsem například to zjišťování přímá, nepřímá úměrnost dělala u tabulky sloupeček po sloupečku a šipkami jsme si to tam prozkoumávali. Ale pak člověk zase narazil na to, že i když*

Kritická místa/ nepřímá úměrnost	prozkoumáš například přes první sloupeček ty ostatní, pak oni mají stejně problém přijmout, že to platí pro všechny. Tohle přijímají snáz.“

Tab. 7.5: Vybrané citace z rozhovorů C1 – C2 pro vybrané kategorie.

7.6 Pozorování – náslech CN1, učitelka JS, ZŠ Praha

Náslech proběhl v 7. ročníku ZŠ Bronzová v Praze dne 6. 6. 2013. Cílem hodiny bylo zopakování nepřímé úměrnosti, které bylo zařazeno před pololetní písemnou práci. Učitelka uvádí, že nepřímá úměrnost byla probírána již před delší dobou.

Žáci jsou seznámeni s cílem hodiny. Učitelka se ptá třídy na definici nepřímé úměrnosti. Ze třídy přichází velmi přesná, zřejmě naučená definice. Žáci jsou dále vyzváni k uvádění příkladů nepřímé úměrnosti. Chybné odpovědi nejsou doprovázeny motivačním povzbuzením, spíše je poukázáno na selhání žáka. Učitelka důsledně vyžaduje kázeň a pozornost žáků. U odpovědí je vyžadováno vždy zdůvodnění. Opakovaně se učitelka odkazuje na poučku „kolikrát více, tolikrát méně“, upozorňuje na ekvivalentnost s poučkou „kolikrát méně, tolikrát více“. Žáky opravuje, pokud použijí místo slova „kolikrát“ slovo „čím“. Je zajímavé, že mezi žákovskými příklady nepřímé úměrnosti zazněl i příklad (zdánlivý model nepřímé úměrnosti), který jsem rozebíral na násleších u učitelky MH – závislost množství paliva v nádrži a počtu najetých kilometrů. Myslím, že i nejistota paní učitelky (ani nepotvrdila, ani neodmítla zařazení do nepřímé úměrnosti) ukazuje na složitost této úvahy.

Obr. 7.15: (Mezník, 2012, s. 2)

Učitelka ve větší části hodiny pracuje s interaktivní tabulí, konkrétně s prezentacemi (Mezník, 2012), jejichž jednotlivé části využívá ke zvýšení názornosti (viz obr. 7.15), k připomenutí vlastností nepřímé úměrnosti (prostřednictvím tabulky potvrzuje platnost pouček „kolikrát více, tolikrát méně", „kolikrát méně, tolikrát více"), při společném řešení úloh i žákovských řešení u tabule.

V prezentaci převládají úlohy na určení typu závislosti. Učitelka opakovaně zdůrazňuje konstantnost součinu dvou veličin. Mezi nabízenými úlohami je vyšší výskyt úloh, které nejsou modelem nepřímé úměrnosti (jedná se tedy o ne-modely nepřímé úměrnosti). Žáci jsou procvičováni v určení typu závislosti a ve výpočtu neznámých hodnot v tabulce. Vždy jsou vyzýváni ke zdůvodnění svých odpovědí. Kromě úloh uvedených v prezentaci učitelka rozebírá i další závislosti (délka strany čtverce a obsah čtverce, rychlost a čas při konstantní dráze).

Zběžně (opět prostřednictvím prezentace) je připomenut graf nepřímé úměrnosti.

Druhá část hodiny je věnována trojčlence. Na začátku je po dětech požadována definice, co je trojčlenka. Přichází opět přesná odpověď: „Typ úlohy na přímou či nepřímou úměrnost, kdy tři veličiny znám a čtvrtou mám vypočítat." Paní učitelka zmiňuje dva způsoby zápisu a následného řešení. Za prvé přes zápis úměry $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$; $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b}$ a za druhé (ten následně preferuje) přímo přes vyjádření neznámé $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$. Všichni žáci, kteří se objevili u tabule, jsou si zápisem i řešením trojčlenky jistí. U jedné z úloh paní učitelka doporučuje věnovat zvýšenou pozornost zadání úlohy: „Dvě čerpadla naplní nádrž za 7,5 hodin. Pokud zapojíme do čerpání další tři čerpadla, za jak dlouho se naplní nádrž tentokrát?" Sama komentuje kritické místo v zadání (nepočítáme se třemi, ale s 2 + 3 čerpadly).

Žákům jsou rozdány dva pracovní listy. První list je určen k procvičení při domácí přípravě, druhému listu je věnován zbytek hodiny. Učitelka nechává chvilku na seznámení se se zadáním úloh. Poté vyvolává žáky k tabuli. Dvě úlohy jsou na přímou úměrnost a dvě na nepřímou úměrnost. Žákovská řešení u tabule jdou vždy trojčlenkou.

Na závěr hodiny učitelka hodnotí celou hodinu – individuálně chválí, uvádí i výhrady k práci několika žáků.

Závěrečný komentář: Při vyučování dominuje osoba učitelky. Žákovská aktivita se omezuje na stručné odpovědi žáků, vybraní žáci řeší úlohy u tabule, ostatní do sešitu. Chybí prostor pro diskusi. Paní učitelka klade důraz na kázeň při hodině, která má pozitivní vliv na soustředění žáků, negativum se projevuje v okamžicích, kdy žáci mají potřebu některé věci diskutovat se spolužákem, což jim není umožněno. Učitelka nedostává od všech žáků zpětnou vazbu, zda látku pochopili. Žáci pracují pouze s doporučenými strategiemi řešení. Některé prvky zmiňované při rozhovorech s učitelkou (C1 a C2) se při náslechu objevily (například práce s převzatými materiály – elektronická prezentace, názornost – viz obrázek 7.15, menší prostor pro práci s učebnicí, vyžadování zdůvodnění žákovských odpovědí) jiné nikoliv (například práce s vlastními materiály, pozitivní motivace slabších žáků).

8. Závěr

Na základě formulovaných cílů diplomové práce popíši postupně jejich naplnění.

Cíl 1 – *U vybraných zkušených učitelů matematiky identifikovat a popsat didaktické praktiky používané při výuce nepřímé úměrnosti a výuce příbuzných témat.*

Cíl 2 – *Zjistit, jakými prostředky tito učitelé překonávají úskalí, která v tomto tématu spatřují.*

Rozhovory přinesly informace o jednotlivých učitelích, jejich přístupech k učení, cílech a preferencích při výuce, dále seznam kritických míst obecně matematických či konkrétně se týkajících tématu nepřímé úměrnosti a v neposlední řadě způsoby překonávání těchto kritických míst. Nejvíce informací poskytla paní učitelka MH, která mi vyšla maximálně vstříc – nadstandardním množstvím rozhovorů, umožněním několika náslechů, zpřístupněním písemných prací žáků a poskytnutím řady dodatečných informací. Učitelé opakovaně kladli důraz na určité aspekty výuky, z nichž jsem následně vytvořil průnik s kritérii pro analýzu učebnic. Takovými aspekty byly například důraz na dostatek nabízených izolovaných modelů, požadavek spirálovitého vracení se k učivu či individualizovaná výuka prostřednictvím gradovaných úloh. Z rozhovorů s učiteli jsem získal nejen důležité informace, ale také zkušenost s kódováním podle postupů a metod zakotvené teorie. Konkrétní výstupy vztahující se k prvním dvěma cílům jsou uvedeny v kapitolách 2 a 7 a v přílohách Y1, Y2 a Y3.

Cíl 3 – *Provést analýzu nejčastěji používaných učebnic, popř. těch, které preferují oslovení učitelé, z hlediska přístupu k výuce nepřímé úměrnosti.*

Rozbor učebnic přinesl pohled na koncepci výkladu nepřímé úměrnosti a příbuzných témat, jako jsou poměr, úměra či přímá úměrnost. Nabídl porovnání učebnic používaných v různých národních prostředích či porovnání různých sad učebnic určených pro jedno prostředí. Zdrojem informací zde byly jednak vybrané zahraniční studie, ale i vlastní analýza učebnic. Zvolené studie se většinově zaměřovaly na obsahovou analýzu učebnic, ve které zkoumaly rozložení zastoupených úloh z pohledu jejich kontextu, struktury úloh (otevřené či uzavřené), kognitivní náročnosti či typu úlohy v rámci tématu (výpočet neznámé hodnoty, numerické porovnání apod.). Vlastní obsahová analýza učebnic se také držela těchto kritérií, navíc v souladu s konstruktivistickou teorií poznávacího procesu přinesla kvantitativní pohled na skladbu úloh podle typu modelu – zdánlivý, překvapivý, ne-model. Uvedené modely se ve zkoumaných učebnicích vyskytly minimálně. U většiny učebnic byl pozorován menší prostor, který je v nich věnován tématu nepřímé úměrnosti, zejména ve srovnání s úměrností přímou. Kromě obsahové analýzy učebnic jsem provedl jejich hodnocení podle vlastních kritérií (didaktické zpracování, funkce učebnice, množství a struktura úloh, zastoupení motivačních prvků, podpora individualizované výuky) s následným porovnáním nejčastěji používaných učebnic matematiky v českém prostředí. Konkrétní výstupy vztahující se ke třetímu cíli práce jsou uvedeny v oddílech 4.2 a 4.3.

Cíl 4 – *Vybrat vhodné úlohy, které by diagnostikovaly žákovu znalost nepřímé úměrnosti, a u nich identifikovat žákovské strategie řešení a jejich případné obtíže.*

Při vyhledávání strategií řešení úloh na úměru a nepřímou úměrnost jsem se opíral jednak o strategie popsané ve vybraných studiích (viz oddíl 5.2), které byly v určité míře potvrzeny i vlastním výzkumem, a jednak o strategie pozorované na násleších či získané rozborem písemných prací žáků. Mezi používanými strategiemi lze vypozorovat jak ty nejintuitivnější (např. strategie jednotkové hodnoty), tak ty, které se opírají o algoritmické postupy (např. strategie trojčlenky), popř. strategie individuální s menší četností výskytu (např. výstavbová strategie). Vlastní výzkum přinesl také pohled na preferované strategie pod vlivem školního výkladu. Žáci, kteří se s výkladem nepřímé úměrnosti setkali relativně nedávno, většinově upřednostňovali nabízené strategie či reprezentace (pomocí trojčlenky, tabulkou, přes jednotkovou hodnotu). Žáci, kteří měli delší časový odstup od výkladu nepřímé úměrnosti, si nabízenými strategiemi nebyli tolik jistí a uchylovali se k intuitivnějším či ryze individuálním strategiím. Intuitivnost strategie jednotkové hodnoty potvrdil její výskyt ve všech skupinách žáků – ovlivněných i neovlivněných výkladem nepřímé úměrnosti. Konkrétní výstupy vztahující se ke čtvrtému cíli práce jsou uvedeny v kapitolách 5 a 6.

Cíl 5 – *Porovnat zjištěné poznatky s poznatky z odborné literatury.*

Konfrontací zjištěných poznatků s poznatky z odborné literatury byly potvrzeny některé žákovské strategie řešení (viz cíl 4). Nejvíce různorodých strategií řešení bylo zaznamenáno u učitelky MH, která svým pojetím učení vytváří největší prostor pro individualizaci výuky. To potvrdilo závěry studie uváděné v oddíle 5.2.2. Teorie poznávacího procesu a rozhovor s učitelkou MH potvrdily průnik této teorie s pojetím učení u této učitelky. Využívání učebnic oslovenými učiteli nebylo kvantifikováno, přesto lze z provedených náslechů vypozorovat určité srovnání s vybranými poznatky z odborné literatury. Ve srovnání se závěry studie TIMSS 2003 (převládali učitele, kteří učebnici využívali jako základ pro svou výuku) či práce Červenkové (2011) (v matematice tvořila práce s učebnicí 31 % délky trvání výuky) u učitele JKN učebnice při vyučování hrála stěžejní roli, u učitelky MH doplňkovou a u učitelky JS minimální. Ohledně používaných organizačních forem výuky při hodinách matematiky Červenková (2011) uvádí převažující hromadný výklad a dále diktovaný zápis s pomocí učebnice. Hromadný výklad převládal na násleších u všech tří učitelů. Pouze učitelka MH jej doplnila širší škálou dalších organizačních forem (vysvětlování učitele, diskuse, práce s textem, partnerská výuka, samostatná práce a individualizovaná výuka). Diktovaný zápis s pomocí učebnice se u oslovených učitelů nevyskytl. Zkušenosti obou učitelek potvrdily, že na matematiku se žáci z učebnice takřka neučí. Konkrétnější výstupy vztahující se k poslednímu cíli práce jsou uvedeny zejména v kapitolách 3, 5 a v oddílech 4.1, 4.3.

Je zřejmé, že odpovědi, ke kterým jsem došel, jsou ovlivněné osobnostními charakteristikami oslovených učitelů, jejich citlivostí na některé aspekty apod. Subjektivní pohled na věc se samozřejmě týká i mého přístupu při výběru otázek a při jejich zpracování. Objektivitu získaných závěrů lze nicméně zpětně posoudit z přepisů rozhovorů, které jsou tak přístupné dalším analýzám např. v rámci zmíněného projektu GAČR. Z provedených rozhovorů a náslechů se jako nejcennější jeví ty, které jsem vedl s paní učitelkou MH. Jsem přesvědčený, že množství a kvalita takto získaných informací jsou odvislé od ochoty osloveného učitele věnovat mým otázkám svůj čas a energii, od navození neformálního vztahu mezi tazatelem a učitelem a konečně od zkušeností a pedagogických kompetencí učitele.

V neposlední řadě chci uvést i přínos celé práce pro mou další učitelskou praxi. Jsem přesvědčený, že nejvíce inspirující pro dobrou praxi učitele je právě kontakt se skutečnými praktikujícími učiteli, seznámení se s jejich metodami a přístupy. Náslechy na hodinách mohou být oboustranně přínosné, přinášejí jak inspiraci pro pozorovatele, tak zpětnou vazbu pro vyučujícího.

9. Literatura a zdroje

ALFREDSSON, L., BROLIN, H., ERIXON, P., HEIKNE, H., RISTAMÄKI, A. *Matematik 4000 kurs A blå.* Stockholm: Natur & Kultur, 2008.

AYDIN, N., BEŞER, Ş. *Matematik Ders Kitabı*: 8. Sınıf (Mathematics Textbooks for Grade 8). Ankara: Tuna Press, 2010.

BAYAZIT, I. Quality of the tasks the new Turkish elementary mathematics textbooks: The case of proportional reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2012, s. 32. ISSN 1571-0068. DOI: 10.1007/s10763-012-9358-8.

BEHR, M., HAREL, G., POST, T., LESH, R. Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook on research of teaching and learning* (pp. 296–333). New York: McMillan, 1992.

BEN-CHAIM, D., FEY, J., FITZGERALD, W. M., BENEDETTO, C., MILLER, J. Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics*. Nizozemí: Kluwer Academic Publishers, 1998, s. 247-273.

BINTEROVÁ, H., FUCHS, E., TLUSTÝ, P. *Matematika 7, Aritmetika : učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vydání. Plzeň : Fraus, 2008. 104 s. ISBN 978–80–7238–679–6.

BLAŽKOVÁ, R. *Poměr, úměra, přímá a nepřímá úměrnost. Trojčlenka.* [online]. s. 6 [cit. 2013-04-21]. Dostupné z: http://svp.muni.cz/ukazat.php?docId=579

BOTLÍK, O., SOUČEK, D. *Komentované výsledky projektu Kalibro: Školní rok 2011/12 – žáci 9. ročníku* [online]. Praha: Kalibro Projekt, s.r.o., 2012 [cit. 2013-05-26]. Dostupné z: http://www.kalibro.cz/Broz539.pdf

BOTLÍK, O., SOUČEK, D. *Komentované výsledky projektu Kalibro: Školní rok 2012/13 – žáci 7. ročníku* [online]. Praha: Kalibro Projekt, s.r.o., 2013 [cit. 2013-05-26]. Dostupné z: http://www.kalibro.cz/Broz547.pdf

CRAMER, K., POST, T.: Proportional reasoning, *The Mathematics Teacher* 86, 1993. s. 404–407.

CRAMER, K., POST, T., CURRIER, S.: Learning and teaching ratio and proportions: Research implications, in D. T. Owens (ed), *Research Ideas for the Classroom, Middle Grades Mathematics*, New York: MacMillan Publishing Company, 1993. s. 159–178.

ČÁP, J., MAREŠ, J.: *Psychologie pro učitele.* Praha, Portál, 2001.

ČERVENKOVÁ, I. *Užívání učebnic v činnostech žáků.* Olomouc, 2011. Disertační práce. Univerzita Palackého v Olomouci. Vedoucí práce Karel Rýdl.

EISENMANN, P., KOPÁČKOVÁ, A. Rozvoj funkčního myšlení ve výuce matematiky na ZŠ. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP : Studijní materiály k projektu.* 1. vyd. Praha : JČMF, 2006. 51 s. CD ROM, ISBN 80-7015-097-1. ISBN 80-7015-085-8.

ENGLISH, L., HALFORD, G. *Mathematics education: Models and processes.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1995.

FRÝZKOVÁ, M., POTUŽNÍKOVÁ, E., TOMÁŠEK V. *Netradiční úlohy: Matematická gramotnost v mezinárodním výzkumu PISA*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání – divize Nakladatelství TAURIS, 2006. ISBN 80-211-0522-4.

GÖĞÜN, Y. *Matematik Ders Kitabı: 6. Sınıf (Mathematics textbooks for grade 6).* Ankara: Özgün Press, 2010.

HART, K. M.: *Children's Understanding of Mathematics: 11–16*, London: John Murray Ltd., 1981.

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. *Matematické úlohy pro druhý stupeň základního vzdělávání: Náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007*. Praha: ÚIV, 2010. ISBN 978-80-211-0612-3.

HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika.* Portál: Praha, 2001. 187 s. ISBN 80–7178–581–4.

HIEBERT, J., GALLIMORE, R., GARNIER, K., BOGARD G, IVVIN, K., HOLLINGSWORTH, J., JACOBS, J., CHUI, A. M. Y., WEARNE, D., SMITH, M., KERSTING, N., MANASTER, A., TSENG, E., ETTERBEEK, W., MANASTER, C., GONZALES, P., STIGLER, J. W. *Teaching Mathematics in Seven Countries. Results from the TIMMS 1999 Video Study.* Washington, DC: U.S. Department of Education, 2003. ISBN 0–16–051381–2.

JANÍK, T., NAJVAR, P., NAJVAROVÁ, V., PÍŠOVÁ, J. Uplatnění didaktických prostředků a médií ve výuce fyziky (se zvláštním zřetelem k učebnicím). In MAŇÁK, J., KNECHT, P. (eds.). *Hodnocení učebnic.* Brno : Paido, 2007, s. 82–97.

KNECHT, P., JANÍK, T. *Učebnice z pohledu pedagogického výzkumu* [online]. Brno : Paido, 2008 [cit. 2011–07–29]. 198 s. Pedagogický výzkum v teorii a praxi, Dostupné z WWW: <http://www.paido.cz/pdf/ucebnice_z_pohledu_pedagogickeho_vyzkumu.pdf>. ISBN 978–80–7315–174–4.

KOPÁČKOVÁ, A.: Podpora funkčního myšlení žáků 1, 2. *Učitel matematiky.* číslo 3, 4. JČMF. Praha: 2005.

KRYNICKÝ, M. [online]. 2010 [cit. 2013-05-10]. *Učebnice matematiky pro gymnázia: Poměry a úměrnosti I a II*. Dostupné z WWW: < http://www.ucebnice.krynicky.cz/Matematika/>.

LESÁKOVÁ, E., ŘÍDKÁ, E. Některá zjištění vyplývající z projektu „Hodnocení výsledků vzdělávání žáků 9. tříd“ In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP : Studijní materiály k projektu.* 1. vyd. Praha : JČMF, 2006. 26 s. CD ROM, ISBN 80-7015-097-1. ISBN 80-7015-085-8.

LESH, R., POST, T., BEHR, M. Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93–118). Reston: NCTM Lawrence Erlbaum, 1998.

LUNDBERG, A., HEMMI K. Proportion in Swedish upper. In: *Teaching mathematics: Retrospective.* Tallinn University, 2009, s. 252-260. ISBN 978-9985-58-688-4.

MEZNÍK, V. Nepřímá úměrnost. *Učební materiál v rámci projektu EU – Peníze do škol* [online]. 19. 07. 2012, [cit. 2013-06-06]. Dostupný z WWW: <http://www.2zsberoun.cz/uploads/projekty/VY_32_INOVACE_308_Matematika_Neprima-umernost---7-rocnik.pptx >.

MOLNÁR, J., et al. *Matematika 7 : učebnice s komentářem pro učitele*. Olomouc : Prodos, 1999. 160 s. ISBN 80–7230–031–8.

Nakladatelství Fraus [online]. Plzeň : 2011 [cit. 2011–08–01]. Učebnice pro 2. stupeň. Dostupné z WWW: <http://ucebnice.fraus.cz>.

Netradiční úlohy. Matematická gramotnost v mezinárodním výzkumu PISA. Praha : ÚIV, 2006. ISBN 80-211-0522-4. Dostupné z WWW: <http://www.tauris.cz/netradicni-ulohy-matematicka-gramotnost-v-mezinarodnim-vyzkumu-pisa>

Nová škola [online]. 2011 [cit. 2011–07–30]. Činnostní vyučování. Dostupné z WWW: <http://nns.cz>.

ODVÁRKO, O. *Matematika pro gymnázia: Funkce*. dotisk 3. vydání. Praha: Prometheus, 2006. ISBN 80-7196-164-7.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. Učebnice matematiky pro základní školu: Matematika pro 7. ročník, 2. díl. Poměr, přímá a nepřímá úměrnost, procenta. *Matematika-fyzika-informatika*. 1999, roč. 8, č. 6, s. 332–339.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Matematika pro 7. ročník základních škol, 2. díl : Poměr, Přímá a nepřímá úměrnost, Procenta*. Dotisk 2. vydání. Praha : Prometheus, 2007. 84 s. ISBN 978–80–7196–285–4.

PĚNIČKA, M. Přímá a nepřímá úměrnost – určení interaktivní. *Metodický portál : Digitální učební materiály* [online]. 15. 04. 2013, [cit. 2013-05-10]. Dostupný z WWW: <http://dum.rvp.cz/materialy/prima-a-neprima-umernost-urceni-interaktivni.html>. ISSN 1802-4785.

P. da PONTE, J., MARQUES, S. Proportion in school mathematics textbooks: A comparative study. In: *WORKING GROUP 15. Comparative studies in mathematics education* [online]. 2007 [cit. 2013-03-02]. Dostupné z:
http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4222/1/Ponte-Marques%20RIPEM%202011.pdf

Prodos [online]. Olomouc : 2009 [cit. 2011–09–25]. Matematika 7. Dostupné z WWW: <http://ucebnice.org/>.

Prometheus [online]. 2011 [cit. 2011–07–30]. Matematika pro 7. ročník ZŠ, 2. díl – Poměr; přímá a nepřímá úměrnost; procenta. Dostupné z WWW: <http://www.prometheus–nakl.cz>.

PŮLPÁN, Z., ČIHÁK, M., MÜLLEROVÁ, Š. *Matematika 7 pro základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2008. ISBN 978-807-2353-989.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha: VÚP, 2005

RENDL, M. : Poznámky k matematické kompetenci dětí v 8. třídě, In: *Pražská skupina školní etnografie: 8. třída.* Příloha závěrečné zprávy o řešení grantového projektu GA ČR 406/00/0470. [Notes on matematical competence of children at 8th grade]. UK v Praze - Pedagogická fakulta, 2003, 15 s., výzkumná zpráva nepublikovaná, pro: GA ČR

ROSECKÁ, Z. *Aritmetika 7: Pracovní sešit – přímá a nepřímá úměrnost, trojčlenka, slovní úlohy*. Brno: Nová škola, 1998. ISBN 80-85607-80-8.

ROSECKÁ, Z., ČUHAJOVÁ, V., RŮŽIČKA, J. *Aritmetika, učebnice pro 7. ročník*. Brno : Nová škola, 1998. 86 s. ISBN 80–85607–74–3.

SIGURGEIRSSON, I. *The Role, Use and Impact of Curriculum Materials in Intermediate Level Icelandic Classrooms.* Susssex : University of Sussex, 1992. OCLC 53680991.

SMITH, M. S., STEIN, M. K. Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 1998. s. 344–350.

STRAUSS, A. CORBINOVÁ, J. *Základy kvalitativního výzkumu: Postupy a techniky metody zakotvené teorie Přel. S. Ježek*. 1.vyd. Boskovice: Albert, 1999, 196 s. ISBN 80-858-3460-X.

STREEFLAND, L.: Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (towards a theory). Part I – Reflections on a teaching experiment, *Educational Studies in Mathematics* 15, 1984. s. 327–348.

ŠAROUNOVÁ, A., RŮŽIČKOVÁ, J., VÄTEROVÁ, V. *Matematika 7, 2. díl*. 1. vydání. Praha : Prometheus, 1998. 216 s. ISBN 80–7196–106–X.

TIMSS & PIRLS International Study Center. *2003 International Mathematics Report – Chapter 7 Classroom Characteristic and Instruction.* [on line] [cit. 29. 7. 2011] Dostupné WWW: <http://www.timss.org/>.

TOKER, Z. *Matematik Ders Kitabı: 7. Sınıf (Mathematics textbooks for grade 7)*. Ankara: Dorukkaya Press. 2010.

TOURNIAIRE, F.: Proportions in elementary school, *Educational Studies in Mathematics* 17, 1986. s. 401–412.

TOURNIAIRE, F., PULOS, S.: Proportional reasoning: A review of the literature, *Educational Studies in Mathematics* 16, 1985. s. 181–204.

VRÁNOVÁ, Z. *Vizuální prvky v učebnicích zeměpisu* [online]. Brno, 2010 [cit. 2012–09–29]. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/152700/pedf_m/Diplomova_prace.txt. Diplomová práce. Masarykova univerzita, pedagogická fakulta. Vedoucí práce Petr Knecht.

Závěrečná zpráva z cyklu pilotních projektů 2005 – 2008: Hodnocení výsledků vzdělávání žáků 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií [online]. CERMAT, 2008 [cit. 2013-05-09]. Dostupné z: http://www.cermat.cz/index.php?id_document=1404034308&at=1

10.Přílohy

10.1 Příloha X1 – Skladba úloh a cvičení v tématu nepřímá úměrnost v učebnici Odvárko, Kadleček (2007)

kapitola: *Nepřímá úměrnost*												
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**SÚ**	**NSÚ**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu, cvičení v učebnici												
úloha A a) na straně 33	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha A b) na straně 33	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha A c) na straně 33	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha B a) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha B b) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha B c) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 1 a) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 1 b) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 2 a) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G2
cvičení 2 b) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G2
cvičení 3 a) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 3 b) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 a) na straně 35	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 b) na straně 35	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha C na straně 35	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 5 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 6 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 7 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 8 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 9 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 10 na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 11 na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G

Tab. 10.1

kapitola: *Graf nepřímé úměrnosti*												
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**SÚ**	**NSÚ**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu, cvičení v učebnici												
úloha A a) na straně 44	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha A b) na straně 44	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha A c) na straně 44	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha A d) na straně 44	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha B a) na straně 44	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha B b) na straně 45	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha B c) na straně 45	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úloha B d) na straně 45	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 1 a) na straně 46	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 1 b) na straně 46	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 2 a) na straně 46	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 2 b) na straně 46	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 3 a) na straně 46	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 3 b) na straně 46	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 a) na straně 46	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 b) na straně 46	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 c) na straně 46	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1

Tab. 10.2

kapitola: *Souhrnná cvičení*												
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**SÚ**	**NSÚ**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu, cvičení v učebnici												
cvičení 11 a) na straně 50	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 11 b) na straně 50	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 11 c) na straně 50	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 12 a) na straně 50	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 12 b) na straně 50	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 13 na straně 50	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 14 a) na straně 50	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 14 b) na straně 50	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 16 a) na straně 51	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 16 b) na straně 51	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 18 a) na straně 51	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 18 b) na straně 51	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G2

Tab. 10.3

kapitola: *Úlohy na závěr*												
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**SÚ**	**NSÚ**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu (cvičení) v učebnici												
cvičení 1 a) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 1 b) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 2 a) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 2 b) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 3 a) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 3 b) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 a) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 b) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 5 a) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 5 b) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 6 a) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 6 b) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 7 a) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 7 b) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 8 a) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 8 b) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 9 a) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 9 b) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 10 a) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 10 b) na straně 47	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G

Tab. 10.4

10.2 Příloha X2 – Skladba úloh a cvičení v tématu nepřímá úměrnost v učebnici Rosecká (1998)

Kapitola: *Nepřímá úměrnost - tabulky.*												
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**SÚ**	**NSÚ**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu, cvičení v učebnici												
cvičení 1 a) na straně 30	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 2 na straně 30	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 3 na straně 30	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G

Tab. 10.5

Kapitola: *Nepřímá úměrnost - úvahy (kolikrát méně … tolikrát více).*												
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**SÚ**	**NSÚ**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu, cvičení v učebnici												
cvičení 1 na straně 31	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 2 na straně 31	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 a) na straně 31	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 b) na straně 31	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 c) na straně 31	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 d) na straně 31	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 e) na straně 31	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 f) na straně 31	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G

Tab. 10.6

Kapitola: *Nepřímá úměrnost - cvičení (Zápisy, řešení úsudkem)*												
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**SÚ**	**NSÚ**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu, cvičení v učebnici												
cvičení 1 na straně 32	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 2 na straně 32	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 3 na straně 32	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 na straně 32	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 5 na straně 32	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 6 a) na straně 32	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 6 b) na straně 32	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G

Tab. 10.7

Kapitola: *Nepřímá úměrnost - cvičení. Zápisy, řešení úměrou.*												
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**SÚ**	**NSÚ**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu, cvičení v učebnici												
příklad 1 na straně 33	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 1 na straně 33	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 2 na straně 33	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 3 na straně 33	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 4 a) na straně 33	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 b) na straně 33	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G

Tab. 10.8

Kapitola: *Nepřímá úměrnost - vyjádření.*												
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**SÚ**	**NSÚ**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu, cvičení v učebnici												
příklad 2 a) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
příklad 2 b) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
příklad 2 c) na straně 34	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G

Tab. 10.9

Kapitola: *Úlohy na přímou i nepřímou úměrnost.*												
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**SÚ**	**NSÚ**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu, cvičení v učebnici												
cvičení 1 na straně 35	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 2 na straně 35	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 3 na straně 35	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 4 na straně 35	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 5 na straně 35	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 6 na straně 35	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 7 na straně 35	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 8 a) na straně 35	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 8 b) na straně 35	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 8 c) na straně 35	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G

Tab. 10.10

Kapitola: *Slovní úlohy.*												
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**SÚ**	**NSÚ**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu, cvičení v učebnici												
cvičení 1 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 2 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 3 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 4 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 5 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 6 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 7 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úsudkové cvičení 1 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úsudkové cvičení 2 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
úsudkové cvičení 3 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úsudkové cvičení 4 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
úsudkové cvičení 5 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
úsudkové cvičení 6 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
úsudkové cvičení 7 na straně 36	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 1.1 na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 1.2 na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 1.3 na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 1.4 na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení 2.1 na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 2.2 na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G2
cvičení 2.3 na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G2
cvičení 2.4 na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
úsudkové cvičení 1 na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
úsudkové cvičení 2 na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
úsudkové cvičení 3 na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
úsudkové cvičení 3* na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G2
úsudkové cvičení 4* na straně 37	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G2

Tab. 10.11

Kapitola: *Tabulky a grafy.*												
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**SÚ**	**NSÚ**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu, cvičení v učebnici												
cvičení 1 a) na straně 38	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 1 b) na straně 38	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 2 na straně 38	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 1 a) na straně 39	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 1 b) na straně 39	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 2 a) na straně 39	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení 2 b) na straně 39	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G

Tab. 10.12

10.3 Příloha X3 – Skladba úloh a cvičení v tématu nepřímá úměrnost v učebnici Odvárko (2006)

kapitola: *Lineární lomené funkce - Nepřímá úměrnost*										
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu, cvičení v učebnici										
příklad 1 na straně 75	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
příklad 2 na straně 75	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G1
příklad 3 na straně 75	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
příklad 5 na straně 76	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
příklad 6 na straně 77	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G1
příklad 7 na straně 78	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G1
úloha 5.1 na straně 80	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.2 na straně 80	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.3 na straně 81	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G1
úloha 5.4 na straně 81	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G1
úloha 5.5 a) na straně 81	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.5 b) na straně 81	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.5 c) na straně 81	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.5 d) na straně 81	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.6 a) na straně 81	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.6 b) na straně 81	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.6 c) na straně 81	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.6 d) na straně 81	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.7 na straně 81	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G1

Tab. 10.13

kapitola: *Lineární lomené funkce - Úlohy k opakování*										
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu, cvičení v učebnici										
úloha 5.14 a) na straně 87	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.14 b) na straně 87	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.14 c) na straně 87	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.15 na straně 87	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.16 na straně 87	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.17 a) na straně 88	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.17 b) na straně 88	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.17 c) na straně 88	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.17 d) na straně 88	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G
úloha 5.18 a) na straně 88	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G1
úloha 5.18 b) na straně 88	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G1
úloha 5.18 c) na straně 88	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G1
úloha 5.18 d) na straně 88	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G1
úloha 5.18 e) na straně 88	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G1
úloha 5.18 f) na straně 88	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G1
úloha 5.19 na straně 88	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	Ř	NŘ	G1

Tab. 10.14

10.4 Příloha X4 – Skladba úloh a cvičení v tématu nepřímá úměrnost v učebnici Půlpán, Čihák, Müllerová (2008)

kapitola: *Nepřímá úměrnost*												
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**SÚ**	**NSÚ**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu, cvičení v učebnici												
příklad A na straně 105	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
příklad B na straně 106	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
příklad C1 na straně 106	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
příklad C2 na straně 107	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení D1 a) na straně 108	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení D1 b) na straně 108	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení D2 a) na straně 108	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení D2 b) na straně 108	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení D3 na straně 108	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení D4 a) na straně 108	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení D4 b) na straně 108	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení D5 a) na straně 108	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení D5 b) na straně 108	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení D6 na straně 108	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení D7 na straně 109	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G2
cvičení D8 na straně 109	K1	K2	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1

Tab. 10.15

kapitola: *Trojčlenka*													
Označení modelu, typu úlohy	**K1**	**K2**	**K3**	**NM**	**ZM**	**PM**	**NK**	**MK**	**SÚ**	**NSÚ**	**Ř**	**NŘ**	**G**
Odkaz na úlohu, cvičení v učebnici													
příklad A na straně 109	K1	K2	K3	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
příklad B na straně 110	K1	K2	K3	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení C1 na straně 111	K1	K2	K3	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení C2 na straně 111	K1	K2	K3	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení C3 na straně 111	K1	K2	K3	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení C4 na straně 111	K1	K2	K3	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení C5 na straně 111	K1	K2	K3	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení C6 na straně 111	K1	K2	K3	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení C7 na straně 111	K1	K2	K3	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení C8 na straně 111	K1	K2	K3	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení C9 na straně 112	K1	K2	K3	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G
cvičení C10 na straně 112	K1	K2	K3	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení C11 na straně 112	K1	K2	K3	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1
cvičení C12 na straně 112	K1	K2	K3	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G2
cvičení C13 a) na straně 112	K1	K2	K3	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G2
cvičení C13 b) na straně 112	K1	K2	K3	NM	ZM	PM	NK	MK	SÚ	NSÚ	Ř	NŘ	G1

Tab. 10.16

10.5 Příloha Y1 – Analýza rozhovoru A1

Kategorie	*Subkategorie*	*Vlastnosti*	*Dimenzionální rozsah*	*Výskyt v rozhovorech*	*Četnost*
Osoba učitele	faktické informace		stručně	2	11
	pojetí učení	popis	stručně	40,50,52,58,75,108	
			podrobněji	33-35,83	
	sebereflexe	popis	stručně	6	
	vnější reflexe	popis	podrobněji	10-14	
Vyučovací metody		popis	stručně	87	3
			podrobněji	16,52	
Podmínky pro práci učitele	vnější	hodnocení			1
			podrobněji	54-58	
Učební materiály	učebnice	výčet	stručně	66-71	2
			podrobněji	17-20	
Motivace žáků		význam	stručně	38,40,44,50,52	5
Kritická místa	obecně matematická/příbuzná tématu NÚ	výčet	stručně	42-46,85,102	7
			podrobněji	48,87	
		překonávání	stručně	44,89	
	nepřímá úměrnost	popis	stručně	87	2
			podrobněji	79	
Zavedení	nepřímá úměrnost	popis	stručně	73	1
			podrobněji	64	
	příbuzná témata NÚ	výčet	stručně	64,75	3
		popis	podrobně	91-96	
Reprezentace, postupy	tabulka	informativně	stručně	64,87	12
	graf	informativně	stručně	87	
		hodnocení	podrobněji	87	
	rovnice	popis	stručně	64,73	
		hodnocení	stručně	87	
	trojčlenka	hodnocení	podrobněji	73	
	kolikrát víc, tolikrát míň	informativně	stručně	64,75	
			podrobněji	11,16	
Návaznost	funkce	popis	stručně	64,85	5
		výčet	stručně	110	
	mezipředmětové vztahy	výčet	stručně	89	
			podrobněji	104-108	

Tab. 10.17

10.6 Příloha Y2 – Analýza rozhovorů B1 až B4

Kategorie	*Subkategorie*	*Vlastnosti*	*Dimenzionální rozsah*	*Výskyt v rozhovorech*	*Četnost*
Osoba učitele	faktické informace			2	20
	pojetí učení	popis	stručně	2,10,16,25,29,37	
			podrobněji	4,20,23,33,35	
			podrobně	21,27,31	
	sebereflexe	popis	stručně	4,27,35,37	
			podrobněji	10	
Vyučovací metody		výčet	stručně	12,21,23,25	6
			podrobněji	29	
			podrobně	27	
Podmínky pro práci učitele	vnitřní motivace učitele	výčet	stručně	2,4,14	15
			podrobněji	10	
	vnější	výčet	stručně	14,15,17,18	
			podrobně	12,16	
		hodnocení	pozitivní	16	
			negativní	16,23,25,31	
Učební materiály	učebnice	funkce	stručně	17,18,21	5
		koncepce	stručně	20	
	vlastní materiály učitele	struktura	podrobněji	21	
Motivace žáků		výčet	podrobněji	27,31,33	3
Kritická místa	obecně matematická	výčet	stručně	35	2
			podrobně	31	
	nepřímá úměrnost				0

Tab. 10.18: Analýza rozhovoru B1.

Kategorie	*Subkategorie*	*Vlastnosti*	*Dimenzionální rozsah*	*Výskyt v rozhovorech*	*Četnost*
Osoba učitele	pojetí učení	popis	stručně	30-32,36,42	24
			podrobněji	34,81-84	
			podrobně	26,40,76-79	
			velmi podrobně	81-91,96-111	
		uspořádání učiva	stručně	14,18,34,67	
			podrobněji	12,44,46,114-117,119	
			podrobně	19-22,113-117	
			velmi podrobně	54	
	sebereflexe		stručně	44,69	
Zpětná vazba		popis	podrobněji	12	1
Motivace žáků			stručně	26,44	5
			podrobně	76-79,89,105-111	
Učební materiály	učebnice	funkce	podrobněji	53-54	23
		informativně	stručně	28,30,47-48	
			podrobně	3-4	
		popis práce s UM	stručně	8,22,74-75	
		hodnocení	stručně	22,30,49-50	
			podrobněji	5-8,54,55-62	
			podrobně	9-16	
	vlastní materiály učitele	informativně	stručně	30-32,48	
			podrobněji	63-67,70-73	
		popis práce s UM	stručně	22,54	
			podrobněji	43-44,69	
Kritická místa	obecně matematická	informativně			0
		překonávání			
	nepřímá úměrnost	informativně	stručně	16,23-24,40,67,95	12
			podrobněji	17-18	
		překonávání	stručně	12,18,26,36,40,95	
Ne-modely	přímá úměrnost	informativně	stručně	33-34	2
	jiná závislost	informativně	stručně	33-34	
Návaznost	číselné reprezentace		stručně	22,44-46	2
Reprezentace, postupy	individuální	informativně	podrobněji	27,28	22
	tabulka	informativně	stručně	34	
	graf	informativně	stručně	34,40	
		uspořádání učiva	podrobně	113-117	
	rovnice	informativně	stručně	26,27,28,40	
	trojčlenka	informativně	stručně	95,119	
	přes jednotku	informativně	stručně	7,12,26,44	
	kolikrát víc, tolikrát míň	informativně	stručně	12,16,95	
			podrobněji	36,40	
		hodnocení	stručně	95	

Tab. 10.19: Analýza rozhovoru B2.

Kategorie	*Subkategorie*	*Vlastnosti*	*Dimenzionální rozsah*	*Výskyt v rozhovorech*	*Četnost*
Osoba učitele	pojetí učení	uspořádání učiva	stručně	89	2
			podrobně	72-79	
	sebereflexe	z otázky učitele	stručně	31	4
			podrobně	23-27	
		vztahy učitel-žák	stručně	29,31	
Vyučovací metody		výčet	stručně	31	1
Podmínky pro práci	vnější	popis	podrobně	72-79	1
Motivace žáků			stručně	7	2
			podrobně	27-31	
Učební materiály	učebnice	popis práce s UM	stručně	23	2
	vlastní materiály učitele	informativně	stručně	92	
Kritická místa	obecně matematická	informativně	stručně	23	2
			podrobněji	9-11	
		překonávání			
	nepřímá úměrnost	informativně	stručně	1	7
			podrobněji	14-21	
			podrobně	5-7,11	
		překonávání	stručně	11,23	
			podrobně	65-71	
	příbuzná témata NÚ	informativně	stručně	64-65,93	4
			podrobněji	83-85	
			podrobně		
		překonávání	stručně		
			podrobně	65-71	
Ne-modely	přímá úměrnost	informativně	stručně	1,45	5
	jiná závislost	informativně	stručně	92-93	
			podrobněji	1-4	
			podrobně	12-22	
Návaznost	témata	popis	stručně	45	7
		popis	podrobněji	48-51,53-55,56-59,59-63,81-87	
	číselné reprezentace	popis	podrobněji	9-11	
Reprezentace, postupy	individuální	informativně	podrobněji	35-43	13
	tabulka	informativně	stručně	32-34	
		hodnocení	stručně	34-35	
	graf	informativně	stručně	32-34,35,53	
		cíle	podrobněji	43-45,48-51	
	rovnice	hodnocení	stručně	34-35	
			podrobně	65-71	
	trojčlenka	informativně	stručně		
	přes jednotku	informativně	stručně	32-34	
	kolikrát víc, tolikrát míň	informativně	stručně		
			podrobněji	11,16	
		hodnocení	stručně		
Zavedení	nepřímá úměrnost				1
	příbuzná témata NÚ	popis	podrobně	59-63	
	ostatní				

Tab. 10.20: Analýza rozhovoru B3.

Kategorie	*Subkategorie*	*Vlastnosti*	*Dimenzionální rozsah*	*Výskyt v rozhovorech*	*Četnost*
Osoba učitele	pojetí učení	popis	stručně	27	*3*
		uspořádání učiva	stručně	51	
	sebereflexe	z otázky učitele	stručně	27	
Motivace žáků			stručně	26-27	2
			podrobně	44-51	
Práce s chybou		popis	podrobněji	44-45	1
Učební materiály	učebnice	popis práce s UM	podrobněji	12-13	2
		hodnocení	stručně	35-37	
Kritická místa	obecně matematická	informativně	stručně	51	9
			podrobněji	14-18,19-22,30-32,33	
		překonávání	stručně	22,33,34,51	
	nepřímá úměrnost	informativně	stručně	75	4
			podrobněji	28-29,76	
		překonávání	stručně	28	
	příbuzná témata NÚ	informativně	stručně	74	5
			podrobně	57-66	
		překonávání	stručně	6-8	
			podrobně	38-43,57-66	
Ne-modely	přímá úměrnost	informativně	stručně	74-76	2
	jiná závislost	popis	podrobně	67-73	
Návaznost	témata	informativně	stručně	75	4
		popis	podrobně	1-2	
			podrobněji	10,52-53	
Reprezentace, postupy	individuální	informativně	stručně	11,12,26-27	24
			podrobněji	23-25	
		analýza	podrobně	1-2	
	tabulka	informativně	stručně	23,74	
		popis práce	stručně	30	
	graf	informativně	stručně	74	
		popis	podrobněji	67-73	
	rovnice	informativně	stručně	2-6	
	trojčlenka	informativně	stručně	2-6,10,11-12,25,26,74,76	
		postup řešení	stručně	8	
	přes jednotku	informativně	stručně	12,23-25	
	kolikrát víc, tolikrát míň	informativně	stručně	75	
		hodnocení	stručně	11	
			podrobněji	12	
Zavedení	nepřímá úměrnost	termíny	podrobněji	67	2
	příbuzná témata NÚ	popis	stručně	44	

Tab. 10.21: Analýza rozhovoru B4.

10.7 Příloha Y3 – Analýza rozhovorů C1 až C2

Kategorie	*Subkategorie*	*Vlastnosti*	*Dimenzionální rozsah*	*Výskyt v rozhovorech*	*Četnost*
Osoba učitele	faktické informace		stručně	1-2	9
	pojetí učení	popis	stručně	12,14,16,30,32	
			podrobněji	22,24,37	
Podmínky pro práci učitele	vnější	popis	stručně	3-4,8,17-18,22-24,41	12
			podrobněji	19-20,32	
		hodnocení	stručně	11-12,41	
			podrobně	5-7,9-10,13-14	
Učební materiály	učebnice	funkce	podrobně	25-26	9
		hodnocení	stručně	27-28	
		informativně	stručně	7	
	vlastní materiály učitele	informativně	stručně	22,34,41	
			podrobněji	8	
	názorné pomůcky	informativně	podrobněji	29-32,33-34	
Motivace žáků	vnější	popis	stručně	12,16,26	5
			podrobněji	14,37	
Kritická místa	obecně matematická	výčet	stručně	32,34,36-37	6
			podrobněji	39	
		překonávání	stručně	34,37	
Návaznost	mezi tématy	popis	stručně	41	1

Tab. 10.22: Analýza rozhovoru C1.

Kategorie	*Subkategorie*	*Vlastnosti*	*Dimenzionální rozsah*	*Výskyt v rozhovorech*	*Četnost*
Osoba učitele	pojetí učení	popis	stručně	2,6,20,33,35	7
			podrobněji	3-4,22	
Podmínky pro práci učitele	vnější		podrobněji	50-52	1
Zpětná vazba		informativně	stručně	2,22	2
Učební materiály	učebnice	funkce	stručně	9-10	3
		hodnocení	stručně	30-31	
	vlastní materiály učitele	informativně	stručně	31	
Kritická místa	obecně matematická	informativně	stručně	22,35	4
			podrobně	27-29	
		překonávání		24	
	nepřímá úměrnost	informativně	stručně	6,17-18,35	6
			podrobněji	15-16,54	
		překonávání	stručně	19-20	
	příbuzná témata NÚ	informativně	stručně	41-42	6
			podrobněji	43-44	
			podrobně	46-50	
		překonávání	stručně	42,44,50	
Ne-modely	přímá úměrnost	informativně	stručně		1
	jiná závislost	informativně	stručně	34-35	
Návaznost	rovnice		stručně	26	1
Reprezentace, postupy	tabulka	informativně	stručně	12,14,22	11
		hodnocení	podrobněji	6	
	rovnice, koeficient	informativně	stručně	12	
		hodnocení	stručně	8	
			podrobněji	6	
	trojčlenka	informativně	stručně	9-10,26	
		hodnocení	stručně	9-10	
	kolikrát víc, tolikrát míň	informativně	podrobněji	19-20	

Tab. 10.23: Analýza rozhovoru C2.

10.8 Příloha B1 – Přepis rozhovoru z 16. 11. 2012, učitelka MH, ZŠ malé město mimo Prahu

Paní učitelku jsem předem informoval o cílech této práce. Předem jsem jí zaslal i hrubou strukturu otázek, kterých jsem se při rozhovoru chtěl dotknout.

1 J: Martino, já bych se tě na začátek zeptal, jak dlouho učíš a co tě k učení přivedlo.

2 U: Když sečtu roky ve škole s přestávkami tak je to asi 9 let. Učím matematiku a tělocvik. K učení jsem se dostala trochu náhodou a k matice díky tomu, že to bylo jediné, co mi trochu šlo (*smích*). O tom, že budu učitelem, jsem se přesvědčila asi až na VŠ, kde mě hodně bavila didaktika a prof. Hejný. Ten měl asi největší vliv na to, že jsem chtěla učit a chci učit i teď. (*smích*)

3 J: Já vím, že když jsi od nás odcházela, tak to bylo mimo školství. To jako že je člověk unavený, nebo … ?

4 U: Vždycky jsem věděla, že si v učení udělám přestávku a nakouknu do jiných světů. Myslím, že to je dobrá cesta. Zvenku člověk získá nadhled a srovná si hodnoty a cíle, s kterými do učení vstupuje. Díky tomu pohledu zvenčí si myslím, že dobrý učitel je ten, který zanechá stopu u dítěte v jeho hodnotovém vidění světa a taky ovlivní přístup k rozvoji jeho osobnosti a jeho dovedností. Podle mě nakonec nejde o konkrétní znalosti, ale o cestu, kterou dítě vykoná. Taky je potřeba vlastní zapálení pro věc … a tím zažehnutí plamínku i u dětí.

5 J: To jsi mi trošičku ukradla další otázku (*smích*)

6 U: Aha.

7 J: No vidím, že nám to půjde rychle.

8 U: (*smích*)

9 J: Tak ještě chvilku zůstaňme u tebe. Ty bys dokázala sebe charakterizovat, myslím, v čem vidíš své silnější stránky a v čem naopak ty slabší?

10 U: Slabé stránky u sebe vidím v chaotičnosti. Silné v empatii, vnímání dítěte jako celku a v hledání jeho cesty k rozvoji. Taky snahu o nějaké vedení, konstruktivní vedení.

11 J: Já vím, že ten odchod z Klíčku, alespoň tak jak jsem to periferně vnímal, že jsi se s některými lidmi, na některých věcech neshodla … tak mě napadá otázka, jak je pro tebe důležité, to zázemí, podpora okolí …

12 U: Vedení a kolegové jsou pro mě partneři, od kterých se mohu obohatit … někdy se stane, že to z nějakého důvodu nefunguje. To beru jako škodu na všechny strany …
Také rodič je určitě důležitý k rozvoji dítěte … přeci jen ho zná nejlépe… a tak spolupráce s ním je základní kámen úspěchu. To na Klíčku fungovalo stoprocentně, ta komunikace.

Rodina je pro úspěch hodně důležitá … hlavně u dětí, které mají nějaké problémy … myslím, že důležité je naučení určitých návyků … hlavně pracovních …

Třídní kolektiv je více než důležitý … učení se od sebe navzájem, objevování společně …

13 J: A takové to hodnocení, jak to ve školství funguje, nefunguje nebo co se změnilo, jestli jsi schopná to v průběhu těch x let reflektovat, vidíš tam spíše posuny k lepšímu?

14 U: Dnešní situace je problematická, z mnoha důvodů … a je otázka jak moc se o tom rozpovídávat. Pokud to bude důležité, můžeme to rozvést. Málo peněz … Malá prestiž … Někteří učitelé zamrzli a již na sobě nepracují …

15 J: Myslel jsem i takové ty podmínky shora, například existence RVP, tvorba ŠVP. Z vlastní zkušenosti vím, že ne všichni učitelé to přijali za své. Kdybych mluvil za sebe, tak např. u ŠVP takové ty problémy při přechodu dětí z jedné školy na druhou - tohle jsme ještě nedělali a v tomhle jsem zase napřed. Že to není zkoordinované, jestli mi rozumíš.

16 U: RVP a ŠVP je podle mě dobré, jde ale o to, jak to kdo využije. Volnost vítám a prostupnost nevidím jako velký problém. Dobré je, že to vede ke spolupráci mezi učiteli.

Co se týká RVP, obsah není podle mě ideální, hlavně mi tam chybí nějaké věci na prvním stupni - záporná čísla, zlomky, desetinná čísla … Ale v základní myšlence - určité volnosti, odpoutání se od jedné jediné předem přesně naplánované cesty je mi v RVP příjemné. Možnost tvořit si školní plán je podle mě také dobré. Chybí mi k tomu samozřejmě od ministerstva podpora jak časová tak finanční … ale to je na delší povídání …

Určitě je otázka zda ŠVP tvořit obecně nebo konkrétně … jsem pro to, aby to bylo tak popisné, že učitel pochopí cíl, ke kterému má dojít v každém ročníku … jen je problém, že někteří učitelé mají pocit, že cílem je vyložit postup, jak co dělat a ne rozvíjet myšlení … Pak je složité hledání toho průniku …

17 J: Také mi vadí, že tím máš roztříštěné to uspořádání učiva v ŠVP a v učebnicích. Tedy pokud netvoříš ŠVP právě a důsledně podle nich.

18 U: Tvoření ŠVP podle učebnic? Jedině podle učebnice Hejného, to mi přijde použitelné, ale jinak určitě ne.

19 J: Když už jsme se dotkli těch učebnic, tam máš jaké zkušenosti?

20 U: Učebnice jako takové používám jen příležitostně. Snaha je o zavedení a rozšíření prostředí od prof. Hejného žákům druhého stupně, kteří s tím nemají zatím zkušenost. Už se těším na odchovance, kteří na prvním stupni již jeho metodou pracovali … a budu moci jen plynule navázat …

21 Vytvářím si vlastní pracovní listy, které přinášejí takové problémy, otevřené otázky, aby děti měly dostatek příležitosti věci si osahat, zobecnit a to spirálovitě a s nabídnutou různou obtížností nebo stupňující se obtížností, gradací. Děti k objevům docházejí v různém tempu a

tak je důležité nabízet úlohy víceúrovňové. Neodradit je lehkostí ani přílišnou náročností … Cílem je naučit děti pracovat s chybou a učit se z ní. V praxi to ale není tak černobílé. Některé děti si již osvojily formálnější pojetí … řekni mi, jak to mám dělat a ne proč to tak dělám … a je pak těžké je nutit pracovat jinak … vlastně jediné jak to mohu otočit je, nadchnout je něčím, co jim jde, kde zažijí ten objevitelský pocit … AHA … Ideální je pokud si mohu děti od šesté třídy vést … K dětem starším musím přistupovat velmi obezřetně, abych je v matematice úplně neutopila. Ale zase jsem utekla od těch učebnic. Na vysoké úrovni jsou učebnice prof. Hejného pro 1. stupeň. Všechny ostatní nemají takový celistvý přístup, propracovanou strategii … Pokud je používám, je to hlavně u tříd, kde jsou děti zvyklé na frontální výuku, s popisem jak se co dělá a hloubka myšlenek je spíš obtěžuje … Většinou jsou to učebnice, které má škola k dispozici … nyní např. Odvárko, předtím Fraus atd.

22 J: Ještě by mě zajímalo, jak se koukáš na to, jak to u nás na školách vypadá, takové to selektování, boom víceletých gymnázií …

23 U: Selekce je u nás příliš brzy. Osmiletá gymnázia v tomto množství škodí. Když osmiletá gymnázia, tak opravdu pro velmi, velmi malou skupinu. Podobné je to i s výběrovými třídami. Ty bych úplně zrušila. Předávání zkušeností mezi dětmi, učení se od sebe navzájem považuji na základní škole za důležité. Jsem pro široký základ pro všechny co nejdéle … každému tak široký jak unese. (*smích*)

24 J: A třeba i počty dětí ve třídách, co je takové optimum podle tebe?

25 U: Počty dětí ve třídách … ideál při normálním rozložení tak 18 až 20. Příliš malé počty nesou riziko jednostranného rozložení kolektivu - holky-kluci, nadaní-podprůměrní, … Při velkých 28 počtech nelze mít zase individuální přístup.

26 J: Můžu se ještě vrátit víc k tobě? Jaké metody ráda používáš, co se ti osvědčilo, jak to máš nastavené?

27 U: Metody a formy práce (smích). No snažím se o konstruktivistický přístup, mám to pořád spojené s tím Hejným. Není to ale tak jednoznačné, hlavně u starších dětí … chci se zaměřovat na podporující individuální posun žáka, učení se od sebe navzájem, objevování na základě řešení problému … Důležité je spirálovitě se vracet k různým problémům a nabízet gradované úlohy, aby si každý našel to zrovna zajímavé pro něj… Používám práci s celou třídou, práci se skupinami a také s jednotlivci … Pestrost, zábavnost je pro mě lakmusový papírek … pokud děti matika baví, je to pro mě zrcadlo, že to dělám dobře. Souvisí to hlavně s tím, že nepropadnou frustraci, že je pro ně matika nepochopitelná a dostanou úlohy, které je nenudí a ani neodradí svou náročností … jsou to ty gradované úlohy … ideálně je to použitelné právě v různých prostředích od Hejného. Nemyslím si, že je třeba vše učit jen přes úlohy ze života … umělá prostředí jsou také přínosná. Strach z matematiky také souvisí

s vnímáním chyby … ta je určitě potřeba a není nutné přes ní děti strašit … ba naopak … chyba je může posunout hodně daleko.

28 J: Dá se u tebe popsat něco jako typická hodina či prvky té hodiny? Nebo nějaké poměrné zastoupení těch prvků?

29 U: Typická hodina? Těžká otázka … Asi bych to rozdělila podle toho, co tam převažuje, jaký má cíl. Může to být nastolení problému, hledání souvislostí a principů nebo používání objeveného, jinými slovy asi procvičování, ale i tady dochází k doobjevování. Jaké je zastoupení těchto typů v % nedokážu určit … Práce samostatná je tak 30%, zbytek je skupina, dvojice, celá třída…

30 J: Jak už jsem ti psal, ta má práce se jmenuje Kritická místa. Stěžejní část by měla být zacílená na ty úměrnosti, ale zajímalo by mě, jestli nejsou taková kritická místa v matematice obecně. Něco, s čím se setkáváš opakovaně, že žáci s tím mají problém.

31 U: Už jsem to zmiňovala, děti si mají odnést schopnost přemýšlet, analyzovat, propojovat, k tomu zvyšovat svou trpělivost, soustředěnost, pečlivost …

Znalosti jako takové jsou jen nástrojem k těmto cílům a my to přes ně máme zjišťovat …

Jinými slovy formální poznání nejsou cílem …

Díky tomu je pak odpověď na otázku proč se to mám učit jednoduchá … při hodinách se jako člověk rozvíjím v těch a v těch dovednostech - v rozhodování, přemýšlení, odhadu, kombinaci, analýze … To potřebuji skoro při každé činnosti … Co se týká konkrétních poznatků - sčítání zlomků, procenta … je důležité ovládat takové, které na mě život chce … ale díky těm mým dovednostem není problém se je naučit … odvodit a pak používat. Problém je také s přechodem na většinu středních škol, kde se v tomhle náhledu neshodujeme.

Pokud chceš konkrétní témata, která jsou přelomová:

Zlomky … pro základní školu myslím nejdůležitější téma …

Záporná čísla … tady je asi zákeřná věc dva mínusy …

Algebra … mít procesy na takové úrovni, že mohu zobecňovat … mám tolik modelů, že to zobecním … problém vidím v tom, že každý do tohoto bodu dojde jindy, ale my učitelé to zadáváme všem najednou …

Úlohy s pohybem … víceúrovňové úlohy a tím jsou náročné

Funkční myšlení … úměrnosti, i v historii matematici začali objevovat až, až …

Logické myšlení … slovní úlohy …

Konstrukční úlohy … vícekrokové, vyžaduje to vhled a pochopení vztahů u různých objektů …

32 J: A jak ty děti k tomu všemu přesvědčuješ, motivace a tak, co ti funguje?

33 U: Motivace, určitě je ideální ta vnitřní, kterou je potřeba živit … neboli zásobovat dítě pocity radosti, pokroku … pocity AHA poznání … radosti z poznávání …

Ale i ta vnější může vést k cíli … lidská osobnost je fakt složitá… a možnost že přes vnější vliv se dostanu k tomu, že nakonec mě matika bude bavit a přehodím výhybku na vnitřní motivaci je dobrá, ne? (*smích*)

34 J: Jakou roli tam přiřazuješ opakování? Říkáš, že je potřeba se k těm věcem opakovaně vracet.

35 U: Přistupuji k tomu spirálovitě a snažím se nabízet gradované úlohy…
Vracím se k typům úloh, u kterých zatím nedošlo k pochopení tak dlouho, dokud k němu nedojde. Třeba kmenové zlomky pro některé i v deváté třídě… ale je fakt, že některé oblasti preferuji víc a některé míň … nevím, zda je to tak OK?

36 J: Martino, tak já to budu směřovat k závěrečným otázkám (měli jsme pevně dohodnutý čas, paní učitelka už ukazuje na hodinky). Ještě mě napadá, jestli máš nějak ověřené, že to, jak s těmi dětmi pracuješ, že to funguje.

37 U: No hodně pro mě znamená filozofie Hejného, a to myslím, že je celkem odzkoušené, že to funguje. Tak je pro mě důležité naplňovat ta jeho kritéria … jak už jsem říkala. To jestli to dělám dobře nebo špatně beru přes děti, že je matika neodrazuje a že je baví.

38 J: Martino díky, tak když nebudeš proti, já bych se zase zastavil na konci roku a posunuli bychom se více k těm úměrnostem.

39 U: Určitě. Platí, jak jsme se dohodli.